Unidad 2

Hidrostática

2.0 Introducción.

La Hidrostática es la rama de la Hidráulica, y en general de las ciencias físicas, que estudia a los fluidos en equilibrio.

¿Qué es lo que se le estudia a los líquidos y gases en equilibrio?
Como en toda ciencia, primero se pretende describir el comportamiento de los fenómenos, descubrir sus leyes, su naturaleza interna, después, al aumentar su comprensión, se pretenderá predecir comportamientos y consecuencias, y finalmente se espera lograr la aplicación de estos conocimientos en la solución de problemas concretos, en la elaboración de artefactos, maquinaria o productos que satisfagan necesidades del ser humano.

De acuerdo con lo anterior, el fenómeno que aquí estudiaremos es el comportamiento estático de los fluidos, sus leyes y su interacción con los límites sólidos.

Estas interacciones están dadas en términos de *fuerzas y esfuerzos*. Esto se refiere tanto a los que están aplicados en el interior del propio fluido, como entre éste y las paredes del recipiente que lo contiene, o cualquier cuerpo en contacto con él, como los que están sumergidos. El conocimiento anterior nos permitirá analizar y posteriormente diseñar, tanques, albercas, presas, muros de contención, compuertas y recipientes en general, así como cuerpos sumergidos en diversos fluidos. Los temas aquí tratados también son antecedentes de otros relacionados con Obras Hidráulicas y con Mecánica de Suelos.

2.1 Concepto de presión (esfuerzo normal de compresión).

Es común que las interacciones entre los cuerpos se representen por fuerzas puntuales, representadas gráficamente por flechas o vectores. En la realidad, las interacciones entre los cuerpos ocurren a través de sus superficies, es decir la fuerza no actúa en un punto, sino que está repartida, de alguna manera, en las superficies en contacto. De aquí se desprende el concepto de esfuerzo que ya habíamos mencionado como el cociente de la fuerza aplicada entre el área en que está repartida o aplicada.

$$\text{Esfuerzo} = \sigma = p = F / A$$

También mencionamos que los esfuerzos tangenciales o cortantes provocan el movimiento de los fluidos o flujo, de manera que en los fluidos en reposo solo existen esfuerzos normales de compresión también llamados presiones. ***La presión es el esfuerzo normal de compresión.***

La ***presión promedio*** aplicada en un área A esta definida por:

$$P = F / A \qquad (2.1)$$

La ***presión en un punto*** se obtiene cuando el área tiende a cero

$$P = \lim_{A \to 0} \frac{F}{A} = \frac{dF}{dA} \qquad (2.2)$$

Dimensiones y unidades de la presión

De acuerdo con la definición de presión o esfuerzo, las dimensiones de la presión son dimensiones de fuerza entre dimensiones de área:

En el sistema técnico $[P] = [F / A] = FL^{-2}$

En el sistema absoluto la fuerza es derivada, (igual a masa por aceleración)

Entonces $[P] = [F / A] = MLT^{-2} L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$

Unidades:

Kg m/s^2/m^2 = N/m^2 = Pa = pascales	en el MKS absoluto
Kg/m^2	en el MKS técnico
Lb / ft^2	en el inglés técnico

Fuera de sistema se usan:
Kg / cm^2; lb/pulg^2; Torr, bar o bario, Atmosferas simbolizadas por At; milímetros columna de mercurio, metros columna de agua y pulgadas o pies columna de agua o de mercurio.

En donde: 1 At = 1 torr y
1bar = 100 kPa = 100 000 Pa
1mbar = 100 Pa = 1 hpa (hectopascal)

Los metros, milímetros y pies columna de agua o de mercurio se explicarán más adelante.

2.2 Tipos de presión.

Las presiones se clasifican conforme a tres criterios:

A. Por su origen.
B. Por la escala o ubicación del cero de presión.
C. Por el instrumento usado para medirlas.

A.- Por su origen la presión se puede clasificar como:

A.1.- Presión mecánica.- Es la que se desarrolla entre las superficies en contacto de dos cuerpos sólidos.

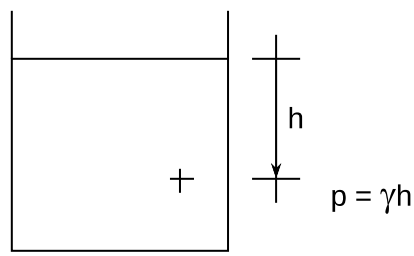
A.2.- Presión hidrostática.- Es la ocasionada por los líquidos en reposo, y se puede detectar en cualquier punto dentro de la masa líquida o de las paredes sólidas que están en contacto con el fluido. Su ecuación es

$$P = \gamma\, h \qquad (2.3)$$

Donde: P es la presión en un punto,

γ es el peso específico del líquido y

h es la profundidad del punto considerado; es decir, la distancia vertical medida desde la superficie libre del líquido, en sentido descendente.



A.3.- Presión neumática.- Es aquella presión ocasionada por el aire u otro gas en reposo.

A.4.- Presión atmosférica.- Es la presión ocasionada por la atmósfera. A pesar de que el aire es muy ligero (su peso específico es aproximadamente de 1 kg/m^3) la capa de aire que cubre al planeta es lo bastante gruesa como para ejercer una presión considerable sobre la superficie de la tierra y de cualquier objeto, (del orden de 1 kg/cm^2 o 10 000 kg/m^2).
La presión atmosférica es variable, depende de la temperatura, la altitud, la latitud y los fenómenos meteorológicos como viento, lluvia, tormentas o huracanes. De hecho su medición cuidadosa resulta indispensable para las predicciones meteorológicas. No obstante su variabilidad, se considera a la presión ***atmosférica normal o "estandart"*** a la que se presenta a 45° de latitud, norte o sur, al nivel del mar, a 20 °C y en un día soleado con la atmósfera en calma. Esta es la definición de una atmósfera de presión.

B.- Por la escala usada, la presión se clasifica en:

B.1.- Presión relativa: *Es aquella que se mide a partir de la presión atmosférica local*. O sea que el cero de la escala se coloca en la presión atmosférica del lugar; es decir, está en relación a esta presión, por eso se llama relativa.

La idea es muy simple, cuando decimos que la llanta de un auto está desinflada porque "no tiene aire" o mejor dicho, *"no tiene presión"*, no estamos pensando que dentro de la llanta exista el vacío total, de hecho, si tiene aire, pero está a la misma presión que el aire de afuera, es decir, a la presión atmosférica local, la cual se considera cero.

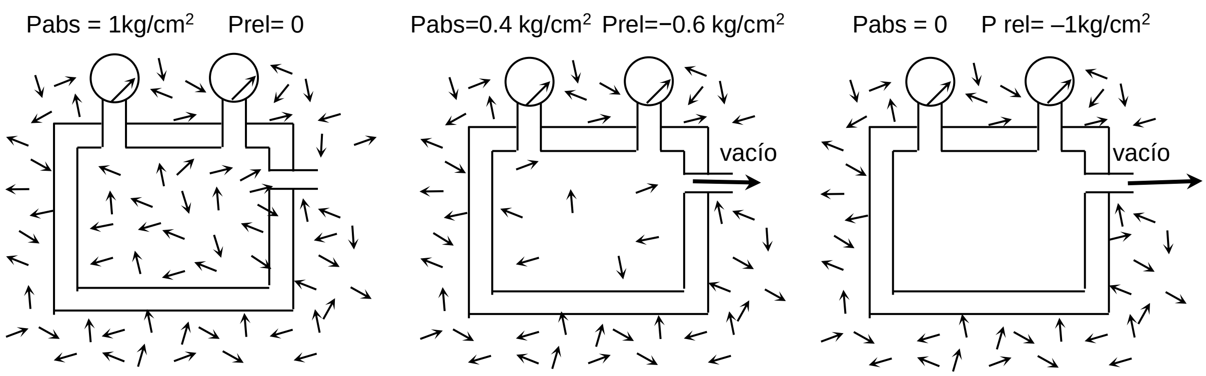
La presión relativa puede ser *positiva* si la presión que se mide es mayor que la atmosférica (P ej. una llanta inflada) o *negativa* si es menor (P ej. Una conserva "al vacío") En este caso también se le llama *vacío parcial*.

B.2 Presión absoluta: *Es la presión medida desde el cero absoluto*, que es el vacío total, también se puede entender como la ausencia total de presión.

Podemos considerar que la presión es la sumatoria de los choques de las moléculas de aire contra las paredes del recipiente y contra otras moléculas en su movimiento caótico que las caracteriza.

Imaginemos un recipiente de paredes gruesas y resistentes al que se le conecta una poderosa bomba de vacío. Antes de encender la bomba, la presión dentro y fuera del recipiente es la atmosférica local. Por simplicidad supongamos un valor de 1 kg/cm^2.

Un medidor de presión relativa conectado al recipiente marcaría cero y un medidor de presión absoluta marcaría 1 kg/cm^2.



La presión es la misma dentro del recipiente que afuera

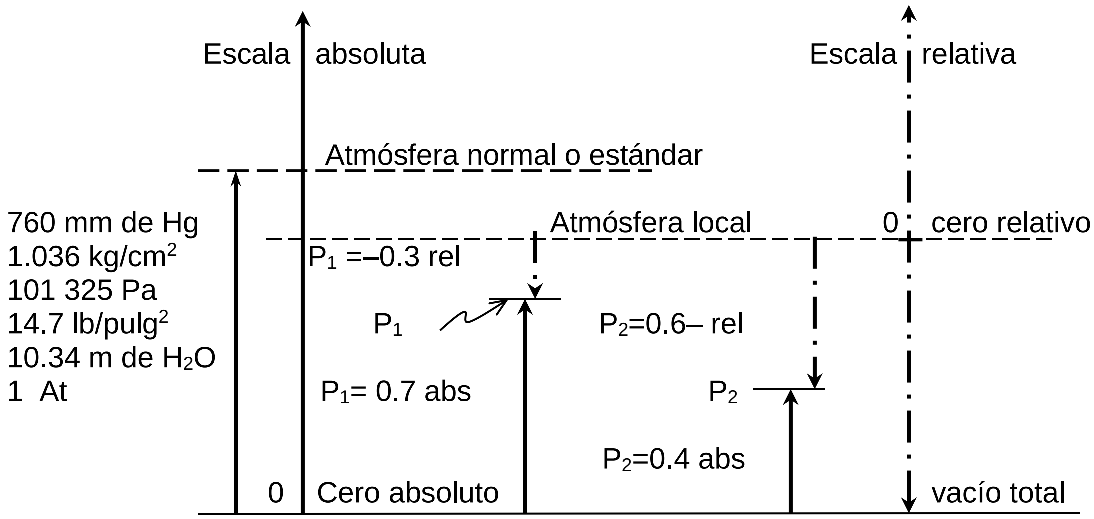
Vacío parcial

Vacío total o cero absoluto

Una vez que se enciende la bomba, las moléculas de aire empiezan a salir del recipiente, con lo cual disminuye el número de choques y con ello la presión. El medidor de presión relativa empieza a marcar una presión negativa y el medidor con escala absoluta marca una fracción de atmósfera. Si continuamos “haciendo vacío” la presión dentro del tanque continuará disminuyendo, el medidor de presión relativa indicará una lectura numéricamente mayor pero negativa, y el medidor de presión absoluta indicará una lectura cada vez menor. Si vaciamos completamente el recipiente habremos llegado al cero absoluto de presión o vacío total. ¿Cuánto indicará cada medidor?

Ejemplo 2.1. Consideremos el vaciado de un recipiente como el anteriormente descrito. Suponiendo que la presión atmosférica local vale 1kg/cm^2:
A) ¿Cuánto será la lectura del medidor de presión relativa cuando el medidor de presión absoluta marque P_1 = 0.7 kg/cm^2?
B) ¿Cuánto medirá la presión absoluta cuando la presión relativa sea de P_2 = –0.6 kg/cm^2?

La *relación entre las dos escalas de presión* se representa en la siguiente figura:



Solución: A) Apoyándonos en la figura ubicamos P_1 = 0.7 Kg/cm^2 (abs) desde el cero absoluto y hacia arriba. La misma presión pero en escala relativa será la distancia desde el cero relativo hasta el punto que representa P_1 medida hacia abajo, ya que es una presión relativa negativa o vacío parcial y valdrá el complemento o faltante a la presión atmosférica local es decir P_1 = 1– 0.7 = – 0.3 Kg/cm^2 (rel).
B) Ubicamos P_2 = –0.6 Kg/cm^2 desde el cero relativo (P atm) y hacia abajo ya que es una presión negativa o vacío parcial. La misma presión en escala absoluta será el complemento desde el cero absoluto y en sentido positivo $P_{2\ ABS}$= 1 –0.6 = 0.4 Kg/cm^2.

De lo anterior se deduce la relación:

$$\text{Pabs} = \text{Pat} \pm \text{Prel} \qquad (2.4)$$

C.- Por el instrumento con que se mide, la presión se clasifica en:

C.1.- Presión manométrica.- *Es la que se mide mediante los instrumentos llamados manómetros.* Los hay de muchos tipos[1], pero la característica común es que *miden la presión a partir de la presión atmosférica del lugar* en donde se realiza la medición, es decir, consideran al cero en el valor de la presión atmosférica local, y toman como positiva cualquier presión mayor y como negativa, o vacío parcial, a cualquier presión menor. Como se puede ver, la presión manométrica es una presión relativa.

C.2.- Presión barométrica.- La medida con el barómetro. El barómetro es el instrumento utilizado para medir la presión atmosférica, por lo tanto presión barométrica y presión atmosférica son dos términos empleados para denominar a la misma presión.

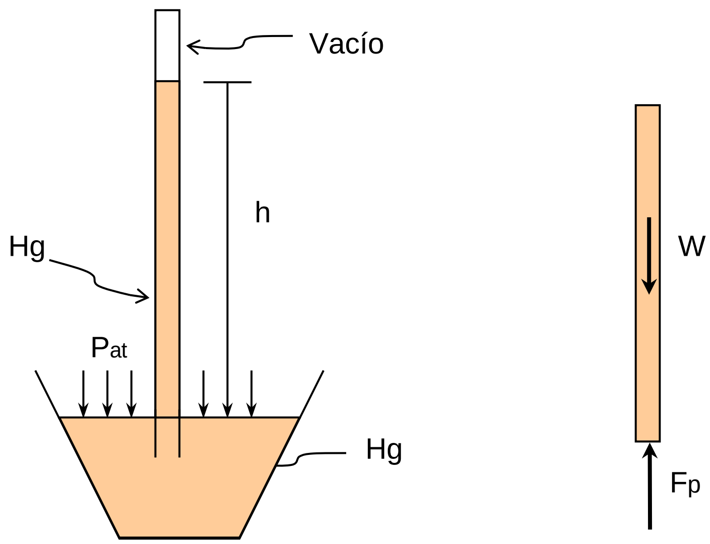
El primer barómetro fue construido en el S. XVII por un físico italiano llamado Torricelli. Consta de un tubo de vidrio cerrado por un extremo al que se llenó con mercurio y después se colocó con la parte abierta dentro de una cubeta que también contenía ese metal líquido.

---

[1] Para conocer los tipos de manómetros más comunes consultar Mataix Claudio. “Mecánica de fluidos y maquinas Hidráulicas” Ed.

De manera asombrosa, en vez de vaciarse completamente, el mercurio se quedó dentro del tubo formando una "columna" de mercurio de altura "h" que variaba un poco según el lugar donde se hacía el experimento. ¿Qué impedía que el mercurio escurriera hasta vaciar al tubo?

Torricelli dedujo brillantemente que era "el peso de la atmósfera" lo que detenía al mercurio



Barómetro de Torricelli. La presión atmosférica equilibra la columna de mercurio.

Después de muchas mediciones se descubrió que a nivel del mar, a 45° de latitud, 20 °C de temperatura y con la atmósfera en calma, la altura de esa "columna" era de 760 mm, descubriendo así el valor de la presión atmosférica.

En la segunda figura se muestra el diagrama de cuerpo libre en donde se representan las fuerzas que actúan sobre la "columna" de Hg. Por equilibrio tenemos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = F_p - W = 0$$

Donde F_p es la fuerza asociada a la presión atmosférica

$$F_p = P_{at}\, A$$

Y el peso de la columna de Hg es

$$W = \gamma_{Hg}\, V = \gamma_{Hg}\, h\, A$$

Sustituyendo y despejando: $\Sigma F_y = P_{at}\, A - \gamma_{Hg}\, h\, A = 0$

$$P_{at} = \gamma_{Hg}\, h = 13.56\ gr/cm^3\ (76\ cm) = 1030.56\ gr/cm^2$$

Que es el valor de una atmósfera normal o estándar.

Resumiendo: la presión se puede clasificar de acuerdo a:

Tipos de presión

- Por su origen
  - Mecánica
  - Hidrostática
  - Neumática
  - Atmosférica
- Por la escala
  - Relativa
  - Absoluta
- Por el instrumento usado para medirla
  - Manométrica
  - Barométrica

Ejemplo 2.2. Las llantas de un auto se inflan a una presión de 28 $lb/pulg^2$.
A) ¿Qué tipo de presión son las 28 $lb/pulg^2$?
B) ¿Cuál es la presión absoluta equivalente si el barómetro marca 730 mm de Hg?

Solución: A) Por su origen podíamos decir que es neumática, ya que está producida por aire en reposo. Por el instrumento usado para medirla, es una presión manométrica, y por la escala es relativa positiva, ya que es mayor a la presión atmosférica pero se empieza a medir a partir de ella.

B) Lo solucionaremos en el MKS absoluto (Tú resuélvelo en los otros sistemas)

$P_{bar} = P_{at} = \gamma_{HG}\ h = \delta_{HG}\ \gamma_{ag}\ h = (13.56)\ (9810\ N/m^3)(0.73\ m) = 97107\ N/m^2$

$P_{LL} = (28\ lb/pulg^2)\ (0.454kg\ /\ 1lb)\ (\ 9.81\ N\ /\ 1\ kg\ )\ (1\ pulg\ /\ 0.0254\ m)^2 = 193292\ N/m^2$ (rel)

$Pabs_{\ LL} = Pat \pm Prel = 97107\ N/m^2 + 193292\ N/m^2 = 290399\ N/m^2 = 290399\ Pa$ (Abs)

$Pabs_{\ LL} = 290.34\ kPa$ (Abs.)

Ejemplo 2.3. El manómetro del tanque de una compresora indica 60 lb/pulg^2; si el barómetro marca 740 mm de Hg, determinar la presión en el tanque en escala absoluta. Resolver en el inglés técnico y después reportar el resultado en el MKS abs.

Solución: Las unidades inglesas de presión más usadas son lb/ pulg^2, pero las unidades sistémicas son lb/ft^2. Así que haremos la transformación:

$$P_T = 60\frac{lb}{pulg^2}\left(\frac{12pulg}{1ft}\right)^2 = 8640\frac{lb}{ft^2}\quad (Rel)$$

La presión barométrica es la misma que la atmosférica

$$P_{At} = \gamma_{Hg}H_{Hg} = Dr_{Hg}\gamma_{Ag}H_{Hg}$$

$$P_{At} = 13.56\left(62.37\frac{lb}{ft^3}\right)740mm\left(\frac{1ft}{304.8\,mm}\right)$$

$$P_{At} = 2053.3\frac{lb}{ft^2}$$

La presión en el tanque en escala absoluta será:

$$P_{TAbs} = P_{At} + P_{TRel}$$

$$P_{TAbs} = 2053.3\frac{lb}{ft^2} + 8640\frac{lb}{ft^2} =$$

$$P_{TAbs} = 10693.3\frac{lb}{ft^2}\ (Abs)$$

Transformamos al MKS téc. Y luego al MKS abs.

$$P_{TAbs} = 10693.3\frac{lb}{ft^2}\left(\frac{0.454kg}{1lb}\right)\left(\frac{1ft}{0.3048m}\right)^2$$

$$P_{TAbs} = 52256\frac{kg}{m^2}\left(\frac{9.81N}{1kg}\right)$$

$$= 512633\frac{N}{m^2}$$

$$P_{TAbs} = 512633\,Pa\ (Abs)$$

Nótese: que el resultado contiene 4 elementos:
1.- el concepto: En este caso la presión del tanque
2.- El valor o magnitud, dada por el número
3.- Las unidades e implícitamente el sistema.
4.- la escala de presiones, en este caso Absoluta.

Debemos asegurarnos que los resultados de este tipo de problemas contengan estos 4 elementos.

Ejemplo 2.4. La puerta de un avión mide 2.1 m X 0.90 m. La presión por dentro es de 0.9 kg/cm^2 (abs) y, por la altura a la que vuela, la presión barométrica es de 530 mm de hg. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre la puerta?

Solución: Resolveremos en el MKS técnico.

Presión externa. De acuerdo a la ecuación fundamental de la hidrostática

$$P_E = \gamma_{Hg}H = Dr_{Hg}\gamma_{ag}H$$

$$P_E = 13.56\left(1000\frac{kg}{m^3}\right)(0.530m)$$

$$P_E = 7186.8\ \frac{kg}{m^2}$$

Presión interna

$$P_i = 0.9\frac{kg}{cm^2}\left(\frac{100cm}{1m}\right)^2$$

$$P_i = 9000\frac{kg}{m^2}$$

Área de la puerta

$$A = 2.1(0.9) = 1.89m^2$$

$$F_i = P_iA = 9000(1.89) = 17010\,kg$$

$$F_E = P_EA = 7186.8(1.89) = 13586\,kg$$

Resultante

$$R = F_i - F_E = 17010 - 13586$$

$$R = 3427\,kg$$

De adentro hacia afuera

Ejemplo 2.5. Encontrar la presión absoluta del gas dentro del recipiente A en el MKS abs y en mm de Hg si las lecturas en los manómetros son P_A=0.8kg/cm^2 y P_B= 21.31 lb/pulg^2 Pbar=740 mm de Hg.

Solución: las unidades de presión del MKS abs. Son Pascales (N/m^2)

$$P_A = 0.8\frac{kg}{cm^2}\left(\frac{100cm}{1m}\right)^2\left(\frac{9.81N}{1kg}\right)$$

$$P_A = 78480\ Pa\ (rel\ respecto\ a\ P_B)$$

$$P_B = 21.31\frac{lb}{pulg^2}\left(\frac{1pulg}{0.0254m}\right)^2\left(\frac{0.454kg}{1lb}\right)\left(\frac{9.81N}{1kg}\right)$$

$$P_B = 147110\ \frac{N}{m^2}\ (rel\ respecto\ la\ atmósfera)$$

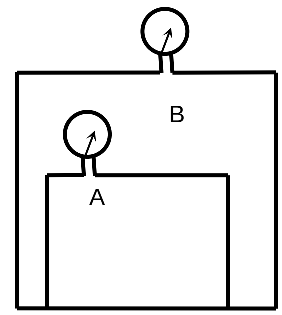
$$P_{ATM} = \gamma_{Hg}H_{Hg} = Dr_{Hg}\gamma_{ag}H_{Hg}$$

$$P_{ATM} = 13.56(9810)(0.74) = 98437\ Pa$$

$$P_{absB} = P_{atm} + P_{relB} = 98437 + 147110 = 245547Pa\ (Abs)$$

$$P_{absA} = P_{absB} + P_{relA} = 245547 + 78480 = 324027Pa\ (Abs)$$

$$P_A = 324.027KPa\ (Abs)$$



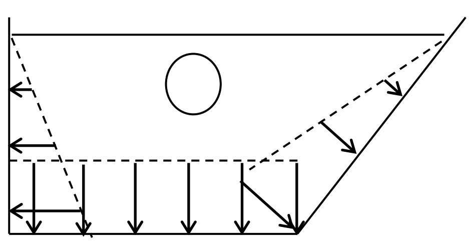
$$P_A = \gamma_{Hg}H$$

$$H = \frac{P_A}{Dr_{Hg}\gamma_{ag}} = \frac{324067Pa}{13.56(9810N/m^2)}$$

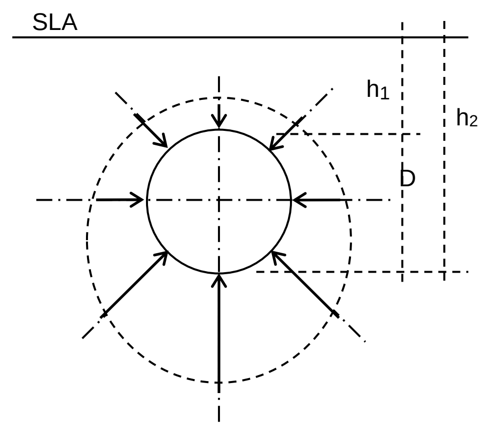
$$H = 2.436\ m = 2436\ mm\ deHg$$

2.3 Propiedades de la presión hidrostática:

1.- *Las fuerzas asociadas a la presión hidrostática siempre son perpendiculares a las superficies sólidas en contacto* y su sentido es empuje.



Las fuerzas asociadas a la presión hidrostática son perpendiculares a las paredes de un recipiente, su sentido es el de un empuje. Nótese que aumentan con la profundidad.

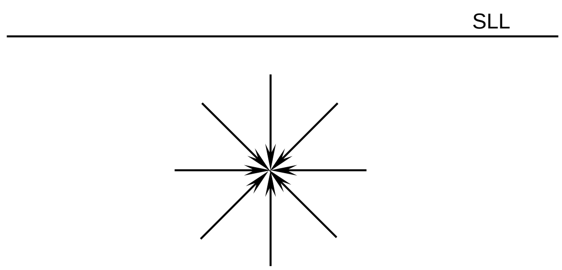


Las fuerzas asociadas a la presión hidrostática sobre una porción cilíndrica de líquido son concéntricas y por lo tanto perpendiculares a la superficie del cilindro. También aumentan con la profundidad

Por ello a las fuerzas asociadas a la presión hidrostática les se llama empujes

2.- La presión hidrostática en un punto es igual en todas direcciones[2].

Si imaginamos que la porción esférica de líquido representada en la figura anterior disminuye hasta convertirse en un punto entonces vemos que las fuerzas de presión del resto del líquido son iguales y actúan en todas direcciones.



La presión en un punto, es igual por "arriba" y por "abajo", debido a que no hay diferencia de profundidad

3.- La presión hidrostática en un punto dentro de un líquido es directamente proporcional al peso específico del líquido γ y a la profundidad h medida desde la superficie libre del líquido.

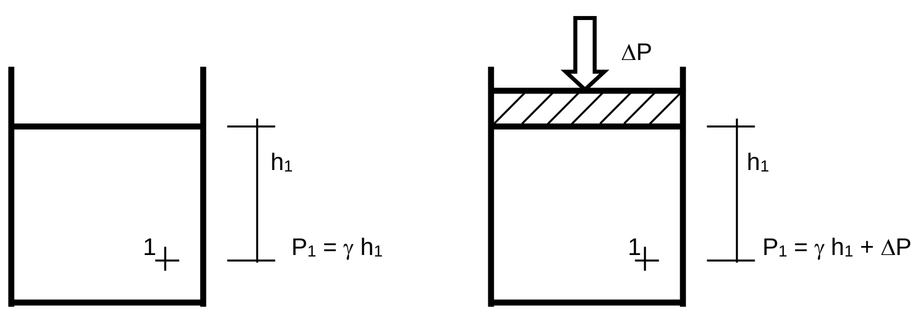
$$\boldsymbol{P = \gamma h} \qquad (2.3)$$

Esta se conoce como la ecuación fundamental de la Hidrostática. Posteriormente haremos su demostración matemática. De esta ecuación se desprende que

- ***En un líquido la presión se mantiene constante a la misma profundidad*.**
- **O bien, *en un plano horizontal dentro de un líquido la presión es constante*.**

4.- En un recipiente cerrado los incrementos de presión se transmiten íntegramente a todos los puntos del fluido y del recipiente. Esto se conoce como el ***principio de Pascal**,* en honor a su descubridor.

Consideremos un recipiente al que se le incrementa la presión. Vemos que ese incremento se transmite o manifiesta en todos los puntos.



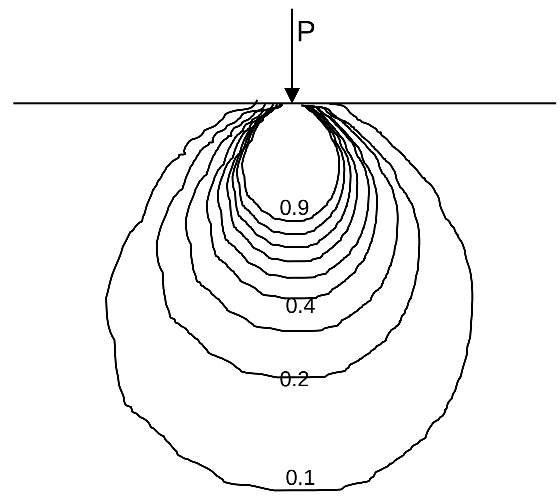
[2] Esta propiedad que está muy relacionada con la anterior, y si lo pensamos bien, en el fondo es la misma.

Esto no ocurre con los sólidos, ya que en ese caso, los esfuerzos disminuyen conforme nos alejamos del punto de aplicación:

Distribución de esfuerzos en el terreno ocasionada por una carga puntual.

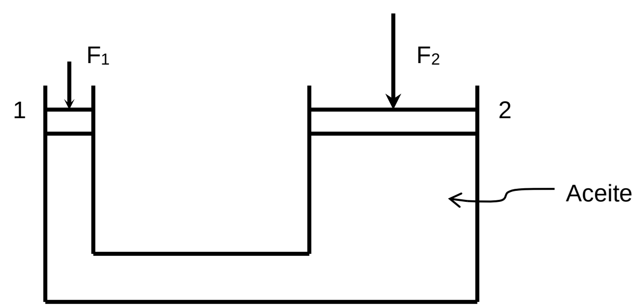
El bulbo de presiones está conformado por las isobaras (curvas de igual presión).

Al alejarse del punto de aplicación el esfuerzo disminuye. En la última curva solo se presenta el 10 % del esfuerzo original P



ftp://ftp.unicauca.edu.co

El principio de Pascal tiene importantes aplicaciones en las máquinas hidráulicas conocidas como “gatos”. Un gato hidráulico básicamente consta de un recipiente de paredes gruesas lleno de un líquido que no sea corrosivo y dos pistones de diferente área, de manera que cualquier fuerza aplicada en el pistón pequeño se multiplicará en el pistón grande:



Esquema de un gato hidráulico

La fuerza en el pistón pequeño genera un incremento de presión que se transmite a todos los puntos del recipiente incluido el pistón grande, de manera que hay la misma fuerza por unidad de área (que es la presión), y al haber más área se logra una mayor fuerza. Pudiéndose levantar grandes pesos.
Por el principio de Pascal:

La presión en 1 = la presión en 2

$$P_1 = P_2$$

$$F_1 / A_1 = F_2 / A_2$$

$$F_2 = (A_2 / A_1)F_1 \qquad (2.5)$$

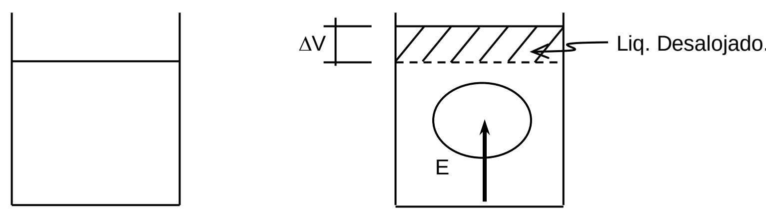
Como $A_2 > A_1$

Entonces $A_2 / A_1 > 1$ y $F_2 > F_1$

De manera que si se conocen las dos áreas se puede determinar la fuerza necesaria que se debe aplicar en 1 para equilibrar o en su caso "levantar" a F_2

5.- Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje ascendente con valor igual al peso del fluido desalojado. Esto se conoce como ***principio de Arquímedes***

Empuje = Peso del líquido desalojado



El volumen desalojado es igual al volumen del cuerpo cuando está completamente sumergido

Se entiende por líquido desalojado al que se encontraba en donde ahora está el cuerpo sólido. Evidentemente ***el volumen del líquido desalojado coincide con el volumen sumergido y puede ser menor o igual al volumen del cuerpo***, dependiendo si éste se encuentra parcial o totalmente sumergido. De manera que

Empuje = peso específico del líquido X volumen sumergido

$$E = \gamma_{liq} V_s$$

La demostración matemática del principio de Arquímedes se hará posteriormente.

2.4 Manómetros de columna de líquido.

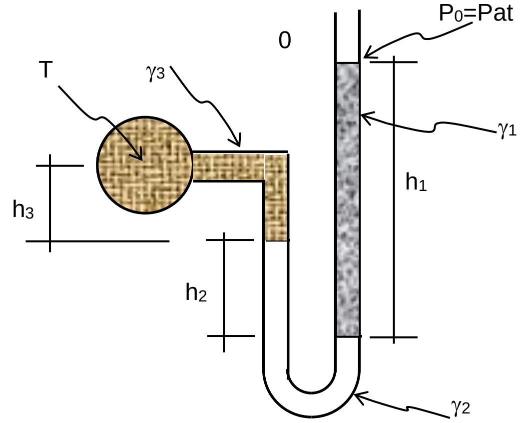
Como habíamos mencionado los manómetros son instrumentos usados para medir presiones relativas; es decir en relación a la atmósfera circundante o local. Existen muchos tipos de manómetros, los hay de "columna de líquido", de carátula, electrónicos, etc[3]. Los manómetros tipo "columna de líquido" resultan baratos y muy fáciles de construir. Aquí nos interesan porque además nos presentan la oportunidad de poner en práctica la teoría estudiada.

En la mayoría de los problemas de manómetros de columna de líquido se trata de encontrar la presión en un punto de un recipiente o de una tubería, a partir de las distancias verticales "h" (alturas o profundidades) de líquidos de peso específico conocido, o que puede conocerse.

Para explicar el método de solución consideremos el siguiente ejemplo general

[3] Para ampliar este tema se recomienda consultar a Mataix C. "Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas" Ed. Harla pp. 62-79.

El problema consiste en encontrar la presión del punto T dentro de la tubería, que aquí vemos en sección transversal, a partir de los pesos específicos de los diversos fluidos y de las alturas de cada "columna". Para ello procedemos de la siguiente manera:



1.- Consideramos el valor de la presión en el extremo opuesto del manómetro; es decir, en un extremo contrario al del punto que nos interesa. En este caso será la presión inicial P_0 en el punto 0 que es la presión atmosférica, porque la tubería del manómetro se encuentra abierta a la atmósfera.
2.- Recorremos la tubería del manómetro sumando o restando los incrementos de presión debidos a los diferentes líquidos:

Si bajamos la presión aumenta en una cantidad $\Delta P = \gamma\ h$

Si subimos las presión disminuye $\Delta P = \gamma h$

Si pasamos de un punto a otro dentro de un mismo líquido al mismo nivel la presión se mantiene constante.

Procediendo de esta manera llegaremos a conocer la presión en T.

$$P_{atm} + \gamma_1\ h_1 - \gamma_2\ h_2 - \gamma_3\ h_3 = P_T \qquad (2.6)$$

Nótese que las "h" se miden entre un menisco y otro de cada líquido.
.

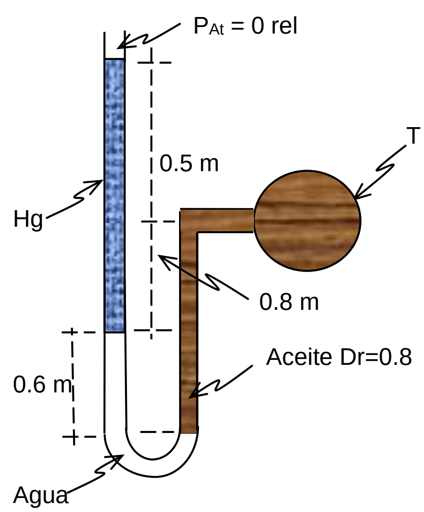
Ejemplo 2.6 Encontrar la presión manométrica en el centro de la tubería T mostrada en corte transversal.

Solución:

$$P_{At} + \gamma_{Hg}(1.3) + \gamma_{Ag}(0.6) - \gamma_{ac}(1.4) = P_T$$

$$0 + 13560(1.3) + 1000(0.6) - 800(1.4) = P_T$$

$$P_T = 17108\ \frac{kg}{m^2}\ (Rel)$$



Ejemplo 2.7. Encontrar la presión manométrica en la tubería que conduce agua.

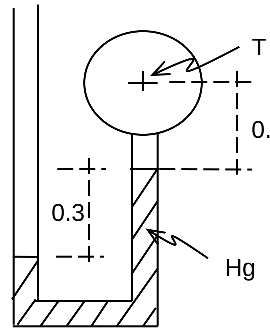
Solución: lo resolveremos en el SI

$$P_{At} - \gamma_{Hg}(0.3) - \gamma_{Ag}(0.6) = P_T$$
$$P_{At} - D_{RHg}\gamma_{Ag}(0.3) - \gamma_{Ag}(0.6) = P_T$$
$$0 - 13.56(9810)(0.3) - 9810(0.6) = P_T$$

$$0 - 13.56(9810)(0.3) - 9810(0.6) = P_T$$

$$P_T = -45{,}793\ Pa = -45.79\ kPa\ (Rel)$$

Es decir, dentro de la tubería hay una presión negativa o vacío parcial



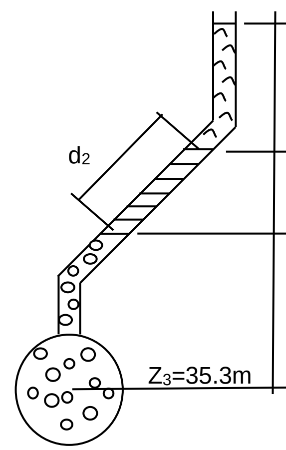
Acotación en m

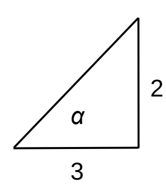
Ejemplo 2.8. Encontrar la presión en la tubería con el manómetro mostrado sabiendo que: $\gamma_1 = 50\frac{lb}{ft^3}$; $\rho_2 = 120\frac{UTM}{m^3}$; $Dr_3 = 2.5$; $h_1 = 60\ cm$; $d_2 = 1.3\ m$; $h_3 = 15"$ y la pendiente del tubo inclinado es 2 a 3

Solución ejem. 2-9:
Lo resolveremos en el MKS tec.

$$\gamma_1 = 50\frac{lb}{ft^3}\left(\frac{1ft}{0.3048m}\right)^3\left(\frac{0.454kg}{1lb}\right)$$
$$\gamma_1 = 801.64\frac{kg}{m^3}$$
$$\gamma_2 = \rho_2 g = 120\frac{UTM}{m^3}\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)$$
$$\gamma_2 = 1177.2\frac{kg}{m^3}$$
$$\gamma_3 = Dr_3\gamma_{Ag} = 2.5(1000)\frac{kg}{m^3} = 2500\frac{kg}{m^3}$$
$$\alpha = angtg\frac{2}{3} = 33.69°$$
$$sen\alpha = 0.5547$$
$$h_2 = dsen\alpha = 1.3(0.5547) = 0.721m$$

$$P_{At} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 = P_T$$
$$0 + 801.640(0.6) + 1177.2(0.721) + 2500(0.381) = P_T$$
$$P_T = 2282.24\ \frac{kg}{m^2}\ \ (rel)$$





2.5 Manómetros diferenciales.

Son manómetros que permiten conocer la diferencia de presiones entre dos recipientes o secciones de la misma tubería. La forma de resolverlos es prácticamente la misma, pero el resultado no será el valor de una presión sino de una diferencia de presiones.

Ejemplo 2.9. Encontrar la diferencia de presiones entre las dos secciones de la tubería mostrada que conduce aceite de Dr_{Ac} = 0.85. El líquido manométrico es tetracloruro de carbono Dr_M= 1.59

Solución ejem. 2.10:
Encontramos los pesos específicos en el MKS tec

$$\gamma_{Ac} = Dr_{AC}\gamma_{Ag} = 0.85(1000)\frac{kg}{m^3}$$
$$= 850\frac{kg}{m^3}$$

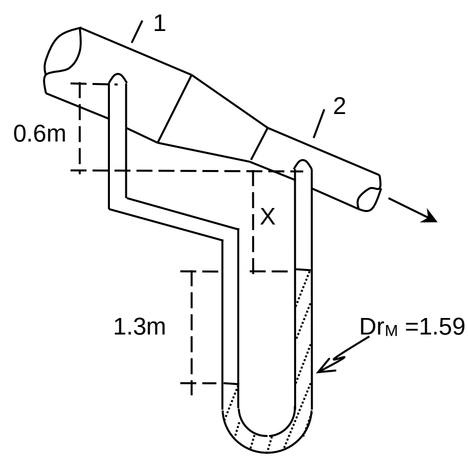
$$\gamma_M = Dr_M\gamma_{Ag} = 1.59(1000)\frac{kg}{m^3}$$
$$= 1590\frac{kg}{m^3}$$

Recorremos el manómetro de 1 a 2 para resolverlo.
La distancia X desconocida no es ningún problema porque está en los dos ramales del manómetro y se cancela en la ecuación de presiones.

$$P_1 + \gamma_{Ac}0.6 + \gamma_{Ac}X + \gamma_{Ac}1.3 - \gamma_M 1.3 - \gamma_{Ac}X = P_2$$

$$P_1 - P_2 = -(850)0.6 - (850)1.3 + (1590)1.3$$

$$P_1 - P_2 = 452\ \frac{kg}{m^2}$$

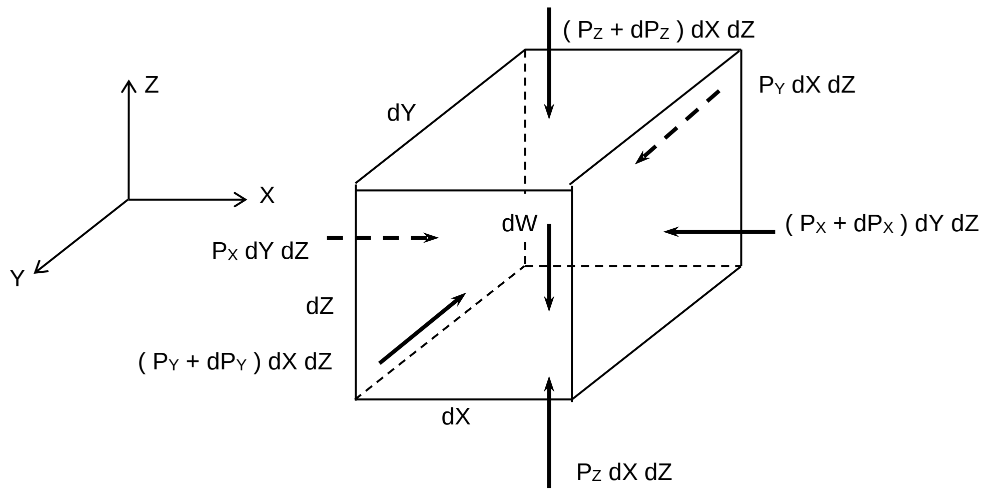


En muchas ocasiones se dibuja a los manómetros diferenciales en corte transversal ¿cómo se vería este?

Resolver un problema semejante pero con el tubo principal subiendo.

2.6. Deducción de la ecuación fundamental de la hidrostática.

Consideremos una porción de líquido de forma cúbica, aislada imaginariamente del líquido que le rodea, todo en reposo. Recordemos que en un fluido en reposo solo existen esfuerzos de compresión o presiones, entonces las fuerzas que el resto del líquido le aplica a la porción considerada son:



Como está en reposo debe cumplirse que $\Sigma \overrightarrow{F} = 0$

Entonces:

$$+\rightarrow \quad \Sigma F_X = P_X\, dY\, dZ - (P_X + dP_X)\, dY\, dZ = 0$$

Dividiendo entre el área dY dZ

$$P_X - P_X - dP_X = 0$$

Por lo tanto

$$dP_X = 0$$

Es decir, *el cambio de presión a lo largo del eje X es cero*.

En el eje Y ocurre algo similar

$$+\swarrow \Sigma F_Y = P_Y\, dX\, dZ - (P_Y + dP_Y)\, dX\, dZ = 0$$

Dividiendo entre el área dX dZ

$$P_Y - P_Y - dP_Y = 0$$

Por lo tanto

$$dP_Y = 0$$

Es decir, *el cambio de presión a lo largo del eje Y es cero*.

Podemos generalizar estas dos conclusiones diciendo que ***la presión hidrostática no cambia a lo largo y ancho de un plano horizontal***, o de otra manera: ***la presión hidrostática es constante a la misma profundidad.***

En el eje Z tenemos:

$$+\uparrow \Sigma F_Z = P_Z\, dX\, dY - (P_Z + dP_Z)\, dX\, dY - dW = 0$$

Pero

$$dW = \gamma\, dV = \gamma\, dX\, dY\, dZ$$

Sustituyendo

$$\Sigma F_Z = P_Z\, dX\, dY - (P_Z + dP_Z)\, dX\, dY - \gamma\, dX\, dY\, dZ = 0$$

Dividiendo entre el área dX dY y eliminando términos

$$dP_Z = - \gamma\, dZ \qquad (2.7)$$

Es común medir las distancias verticales como profundidades; es decir, a partir de la superficie libre del líquido y considerando positivo hacia abajo. Con este cambio de sistema de referencia se elimina el signo negativo y queda

$$dP_Z = \gamma\, dh \qquad (2.8)$$

Esta es la ecuación fundamental de la estática de fluidos, e indica que ***la variación de la presión dP_Z en el interior de un fluido solo ocurre en dirección vertical y es igual al peso específico del fluido γ por la variación de la profundidad dh.***

Para fluidos incompresibles, como es el caso de los líquidos, esta ecuación es fácilmente integrable ya que γ es constante. Así, integrando desde la presión P_1 que existe en una profundidad h_1 hasta la presión P_2 que se encuentra a la profundidad h_2 , tenemos:

$$\int_{P_1}^{P_2} dp = \gamma \int_{h_1}^{h_2} dh$$

Resolviendo $$P_2 - P_1 = \gamma\, (h_2 - h_1) \qquad (2.9)$$

O bien $$\Delta P = \gamma\, \Delta h \qquad (2.10)$$

Es decir: el cambio de presión es igual al peso específico por el cambio de profundidad. Si el punto 1 se toma en la superficie libre $h_1 = 0$ entonces la presión en un punto cualquiera dentro e un líquido será:

$$P = \gamma\, h + P_1 \qquad (2.11)$$

Donde P_1 es la presión en la superficie. Cuando el recipiente está abierto P_1 es la presión atmosférica, si además usamos la escala relativa, como ocurre en la mayoría de los casos, la presión atmosférica vale cero

$$P_1 = P\ atm = 0 \text{ (rel.)}$$

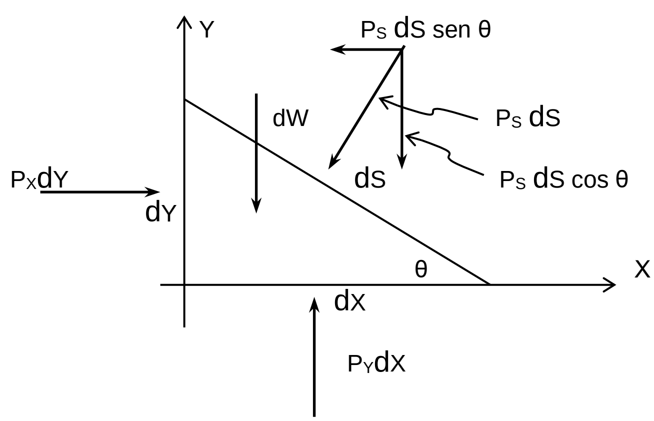
Y la ecuación fundamental de la hidrostática queda.

$$P = \gamma h \qquad (2.12)$$

La presión hidrostática en un punto dentro de un fluido es igual al producto del peso específico del fluido por la profundidad del punto considerado

2.7 Demostración de la propiedad 2: "La presión hidrostática en un punto es igual en todas direcciones".

Consideremos una porción de líquido con forma de un prisma triangular, aislada imaginariamente del líquido que le rodea, todo en reposo. La dimensión perpendicular al papel es la unidad, por lo que dX, dY, dS son las longitudes de cada cara y también las áreas de las caras rectangulares del prisma triangular. Recordemos que en un fluido en reposo solo existen esfuerzos de compresión o presiones, entonces las fuerzas que el resto del líquido le aplica a la porción considerada son perpendiculares a cada cara y se muestran en el siguiente diagrama:



Por equilibrio en el eje X $\rightarrow \Sigma F_X = P_X\, dy - P_S\, ds \operatorname{sen} \theta = 0$

Como $dY = dS \operatorname{sen}\theta$ entonces $P_X = P_S$

Es decir la presión en dirección x es igual a la presión en dirección s

Por equilibrio en el eje Y $\uparrow \Sigma F_Y = P_Y\, dx - P_S\, ds \cos \theta - dW = 0$

El peso es $dW = \gamma\, dx\, dy / 2$

$$\Sigma F_Y = P_Y\, dx - P_S\, ds \cos \theta - \gamma\, dx\, dy / 2 = 0$$

Como $dx = ds \cos \theta$

$$P_Y\, dx - P_S\, dx - \gamma\, dx\, dy / 2 = 0$$

Dividiendo entre dx queda

$$P_Y - P_S - (\gamma / 2)\, dy = 0$$

Como dy es una infinitesimal, (γ/ 2) dy sigue siendo un número extraordinariamente pequeño que prácticamente no altera la suma de los otros dos términos quedando:

$$P_Y - P_S = 0$$

O sea $$P_Y = P_S$$

O sea que la presión en dirección y es igual a la presión en dirección s

Esto es lógico, si se toma el límite, cuando el tamaño de la partícula tiende a cero, es decir, cuando el prisma tiende a un punto, el peso desaparece, no así las presiones.

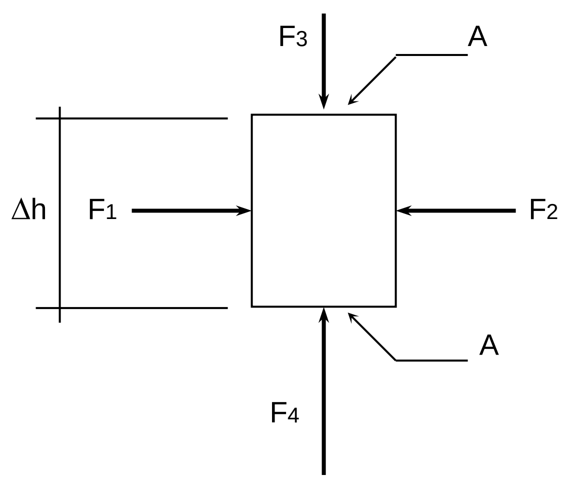
Los resultados pueden generalizarse como:

$$P_X = P_Y = P_S \qquad (2.13)$$

Con lo que se demuestra que ***la presión hidrostática en un punto es igual en todas direcciones.***

2.8 Demostración del principio de Arquímedes.

Analicemos las fuerzas hidrostáticas sobre una porción de líquido delimitado de manera imaginaria con la forma de un prisma rectangular de área transversal A y altura Δh. Este "prisma" de líquido se encuentra en equilibrio dentro de una masa mayor de líquido en reposo. Aquí lo representamos en dos dimensiones por facilidad de dibujo.



Sabemos que la presión es la misma a igual profundidad, y las áreas de las dos caras verticales también lo son $A_1 = A_2$ por ello las fuerzas horizontales actuando en la cara izquierda F_1 son iguales a las que están actuando en la cara derecha F_2. Es decir:

$$P_1 = P_2$$
$$F_1\ A_1 = F_2\ A_2$$

Como $$A_1 = A_2$$

Entonces $$F_1 = F_2$$

Y la resultante de fuerzas hidrostáticas horizontales sobre el cuerpo es cero

$$\rightarrow +\Sigma F_x = 0$$

En el sentido vertical la presión aplicada sobre la cara superior P_3 es menor (por estar a menor profundidad) que la aplicada sobre la cara inferior P_4, como las áreas de ambas caras son iguales $A_3 = A_4 = A$ las fuerzas conservarán la diferencia, es decir habrá una resultante:

$$\begin{aligned} \uparrow +\Sigma F_y &= F_4 - F_3 \\ &= P_4\, A_4 - P_3\, A_3 \\ &= \gamma\, h_4\, A_4 - \gamma\, h_3\, A_3 \end{aligned}$$

Como $\quad A_3 = A_4 = A$

y $\quad h_4 = h_3 + \Delta h$

Entonces $\quad \uparrow +\Sigma F_y = \gamma(h_3 + \Delta h)\, A - \gamma\, h_3\, A$

$$\Sigma F_y = \gamma\, \Delta h\, A$$

Pero $\quad \Delta h\, A = V \quad$ es el volumen de la porción aislada de líquido

$$\Sigma F_y = \gamma\, V$$

y $\quad \gamma\, V = W_{LIQ} \quad$ es el peso del líquido contenido en esa porción aislada. Entonces

$$\uparrow +\Sigma F_y = |W_{LIQ}| \qquad (2.15)$$

Es decir: la resultante de fuerzas del líquido que rodea a la porción aislada, en el sentido vertical, es una fuerza ascendente (que va hacia arriba) con un valor igual al del peso del líquido dentro de la porción.

Si en vez de líquido colocamos ahí a un cuerpo sólido de la misma forma y volumen, las fuerzas del líquido que le rodea continuarán siendo las mismas. Por ello se dice que:

"Todo cuerpo sumergido, total o parcialmente, en un líquido en reposo, experimenta una fuerza vertical ascendente, llamada Empuje, con un valor igual al peso del líquido desalojado".

Que es el enunciado tradicional del principio de Arquímedes., y que también es válido si se trata de un gas. Adicionalmente podemos decir que esta fuerza ***pasa por el centro de gravedad del líquido desalojado.***

Lo anterior es muy lógico ya que el peso del líquido aislado de forma imaginaria, pasaba, evidentemente, por su centro de gravedad, y las fuerzas del resto del líquido sobre esta porción son colineales al peso a fin de equilibrarlo completamente.

Para precisar los conceptos vale la pena aclarar que ***el empuje tiene un valor igual al peso*** (del líquido desalojado) ***pero no es el peso***, el empuje es ascendente y aplicado por el líquido que rodea al cuerpo, es una fuerza hidrostática. El peso es descendente y es aplicado por la tierra, es la fuerza de atracción gravitacional.

Ejemplo 2.10. Para evitar que el bloque se hunda hasta el fondo en agua, es necesario sostenerlo con una fuerza de 17Kg. Cuál será el peso del bloque si tiene las siguientes dimensiones: 0.3m X 0.4m X 0.8m.

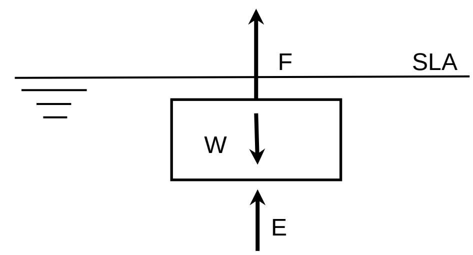
Solución:
Resolveremos en MKS tec.
Por el Principio de Arquímedes:

$$E = \gamma_L V_{SUM} = \gamma_L V_C = 1000(0.3X0.4X0.8$$
$$= 96\ kg$$

Por equilibrio

$$\ldots\ldots + \uparrow \sum Fy = F + E - W = 0$$
$$17 + 96 - W = 0$$
$$W = 113\ kg$$

Nótese que Arquímedes nos dice como calcular la fuerza de flotación; pero el equilibrio se define con "suma de fuerzas igual a cero"



Ejemplo 2.11 Un bloque de madera de 0.15 m X 0.2 m X 0.3 m y Dr =0.6, Flota en aceite de Dr 0.85, ¿cuánto se hundirá?

Solución:
Apoyándonos en el dibujo, la pregunta la podemos traducir como: ¿Cuánto vale H?
El volumen de la madera es

$$V_M = 0.15X0.2X0.3 = 0.009\ m^3$$

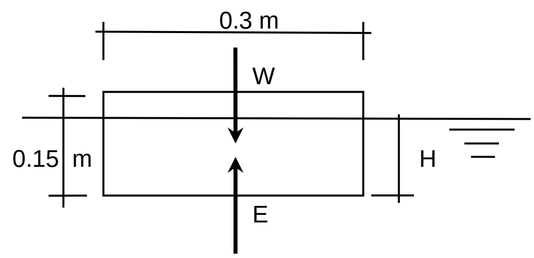
El bloque flota por el equilibrio entre el peso y el empuje

$$+\uparrow \sum Fy = E - W_M = 0$$

$$W_M = \gamma_M V_M = Dr_M \gamma_{Ag} V_M$$
$$W_M = 0.6\left(1000\frac{Kg}{m^3}\right)0.009m^3 = 5.4\ kg$$

El volumen sumergido es

$$V_{SUM} = HX0.2X0.3 = 0.06H$$



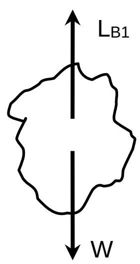
$$E = W_{LIQ\ DES} = \gamma_{Ac} V_{SUM} = Dr_{Ac}\gamma_{Ag} V_{SUM}$$
$$E = 0.85(1000)0.06H = 5.4$$
$$51H = 5.4$$
$$H = \frac{5.4}{51} = 0.1059m = 10.59cm$$

Ejemplo 2.12. Obtener el peso específico de un cuerpo irregular, por ejemplo una roca.

Solución:

Para obtener el Peso específico, la densidad y/o la densidad relativa de un cuerpo irregular el problema principal es determinar su volumen con suficiente precisión. Este problema fue el que llevó a Arquímedes a descubrir el principio que lleva su nombre. Para solucionarlo se procede experimentalmente en la siguiente forma:

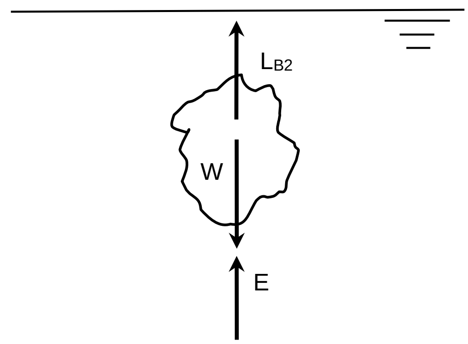
1.- Se mide el peso. Al colocarlo en una báscula se obtiene la primera lectura de la báscula L_{B1}.



Por equilibrio la lectura de la báscula 1 L_{B1} es igual al valor del peso

$$L_{B1} = W$$

2.- Se sumerge el cuerpo en agua y se mide la fuerza con que hay que sostenerlo para que no se hunda*, obteniéndose la segunda lectura de la báscula L_{B2}.



Por equilibrio se determina el empuje

$$+\Uparrow \sum Fy = E + L_{B2} - W = 0$$
$$E = -L_{B2} + W$$

A **L_{B2} algunos autores lo llaman **"peso en el agua"** Lo cual es descriptivo de la manipulación; pero es un error conceptual que confunde, ya que la fuerza con que la tierra atrae a un cuerpo (peso) no depende si está en el agua, en el aire, en el vacío o en otro medio.*

3.- Por Arquímedes se determina el volumen del cuerpo que es igual al volumen sumergido

$$E = W_{LIQ\ DES} = \gamma_{LIQ} V_{SUM}$$

finalmente se aplica $\gamma_C = W_C / V_C$

Evidentemente es necesario conocer el peso específico del líquido.

¿Cómo se procedería se el cuerpo en cuestión es más ligero que el agua?

Ejemplo 2.13 Un globo desinflado, su canastilla y demás aparejos, pesan 150 kg. Cuando se infla con helio forma una esfera de 10 m de radio. Calcular la capacidad de carga. Solucionarlo en el MKS absoluto.

Solución:

Sea W_G el peso del globo; W_H el peso del Helio; E el empuje del aire y C la carga que puede soportar el globo conservando el equilibrio.

Las fuerzas que intervienen se muestran en el DCL.

Como SE resolverá en el MKS abs. entonces los 150 Kg son masa:

$$W_G = mg = 150kg(9.81)\frac{m}{s^2} = 1471.5\ N$$

$$\gamma_H = 1.656\ \frac{N}{m^3}$$

$$\gamma_{Aire} = 12.01\ \frac{N}{m^3}$$

Volumen de una esfera

$$V = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi 20^3}{6} = 4188.8\ m^3$$

Empuje del aire

$$E = \gamma_{Aire} V_{SUM} = 12.01(4188.8)$$
$$E = 50307.4\ N$$

Peso del helio

$$W_H = \gamma_H V = 1.656(4188.8)$$
$$W_H = 6936.7\ N$$

Por equilibrio

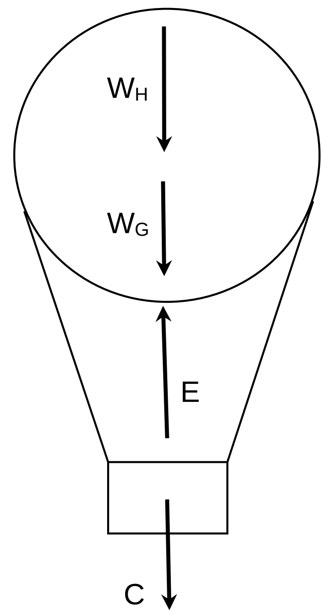
$$+\uparrow \sum Fy = E - W_H - W_G - C = 0$$

$$E - W_H - W_G = C$$

$$C = 50307.4 - 6936.7 - 1471.5$$

$$C = 41899.2\ N$$
$$C = 4271\ kg$$

Fuerzas que intervienen en el problema: DCL.

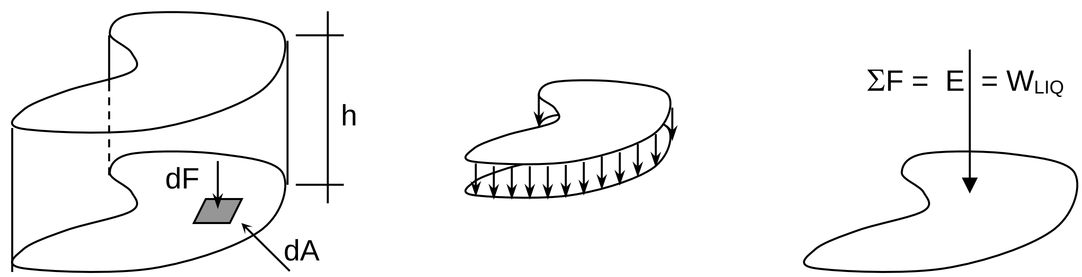


2.9 Empujes sobre superficies.

Caso 1.- Empuje sobre una superficie plana horizontal.

Consideremos una superficie horizontal cualquiera de área A, situada dentro de un líquido en reposo, a una profundidad h. Encontraremos la resultante de fuerzas hidrostáticas aplicadas a la cara superior de esta superficie.

Superficie libre del líquido



Superficie horizontal cualquiera

Fuerza hidrostáticas como carga uniformemente repartida

Empuje resultante representado por una fuerza puntual

Por definición, la presión en el área dA es $P = dF / dA$

Por ello $dF = P\, dA$

Donde P es la presión hidrostática $P = \gamma\, h$

Entonces $dF = \gamma\, h\, dA$ (2.16)

Por lo tanto, la fuerza total sobre la superficie es

$$F = \int dF = \int \gamma h dA$$

Como el líquido es incompresible γ es constante; además, la superficie es horizontal, por lo que la profundidad h también es constante, así podemos sacar ambas cantidades de la integral, quedando:

$$F = \int dF = \int \gamma h dA = \gamma\, h \int dA = \gamma\, hA \qquad (2.17)$$

Donde $hA = V$ es el volumen que está encima de la superficie

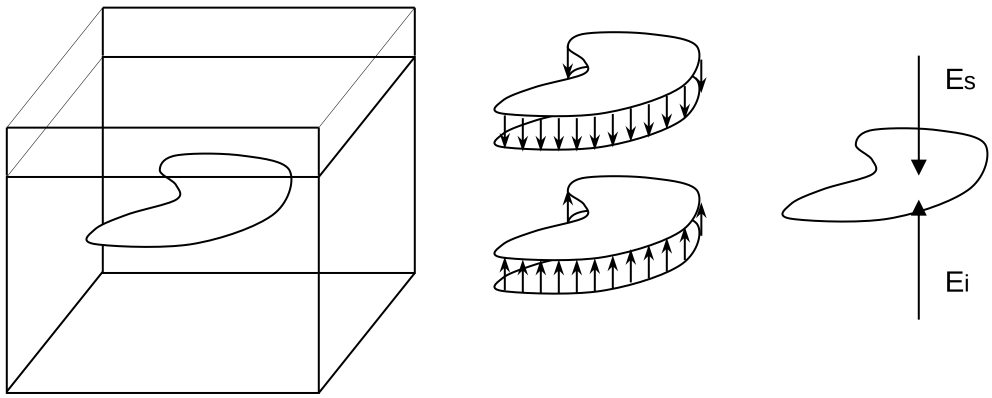
Y $\gamma\, V = W_{LIQ}$ es el peso del líquido que está directamente arriba de la superficie. Entonces:

$$F = \gamma\, V = W_{LIQ} \qquad (2.18)$$

Es decir: ***la fuerza hidrostática sobre una superficie horizontal es igual al peso del líquido que está directamente encima de esa superficie y*** obviamente, ***pasa por el centro de gravedad de dicho líquido.***

¿Qué ocurre si el líquido está por debajo de la superficie?

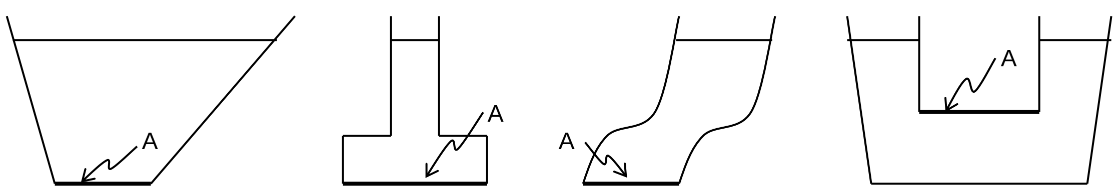
Imaginemos que la superficie es un plano imaginario que carece de espesor y de peso[4], y que se encuentra suspendido dentro de un líquido en reposo. Es claro que las fuerzas que el líquido ejerce sobre la parte superior de la superficie E_s son iguales a las que ejerce por debajo, E_i, de lo contrario no habría reposo.



Entonces, si en un caso real el líquido se encuentra por debajo de la superficie, la magnitud de la fuerza que éste le aplica a aquella, es de la misma magnitud que si estuviera por arriba, pero cambia el sentido de aplicación de la fuerza, por eso el enunciado anterior se puede completar de la siguiente manera:

> ***La fuerza hidrostática sobre una superficie horizontal tiene un valor igual al peso del líquido real o imaginario que está directamente encima de esa superficie y pasa por el centro de gravedad de dicho líquido.***

Ejercicio: marca el líquido que *está directamente encima* del fondo de área A en cada uno de los recipientes mostrados y cuyo peso es igual al empuje hidrostático



Sugerencia: utiliza la deducción anterior para justificar el volumen que marcaste

[4] De hecho toda superficie carece de espesor y de peso, si los tuviera sería un cuerpo. Las superficies reales solo existen asociadas a cuerpos.

Ejemplo 2.14. Calcular la fuerza sobre el fondo y sobre la tapa horizontal de área *eb* del tanque mostrado, que contiene agua:

Solución:

Las dimensiones son: a=1m; b=1.5m; c=2.3m; d=1.2m; e=1.8m

La fuerza sobre el fondo es:

$E_1 = P_1A_1 = \gamma\ h_1\ A_1 = \gamma\ c\ e\ (a+b)$

Nótese que el producto h $A_1 = c\ e\ (a+b) = V_1$ sería el volumen del líquido si no existiera la tapa *eb* .Resolviendo en el MKS técnico

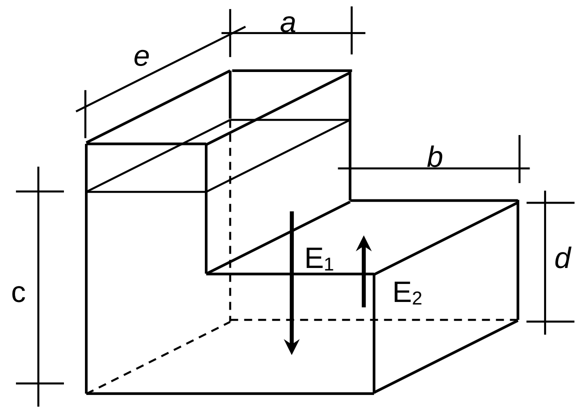
$E_1 = 1000\ (2.3)(1.8)(1+1.5)=10350$ kg

La fuerza sobre la tapa

$E_2 = P_2A_2 = \gamma\ h_2\ A_2 = \gamma\ (c\text{-}d)\ e\ b$

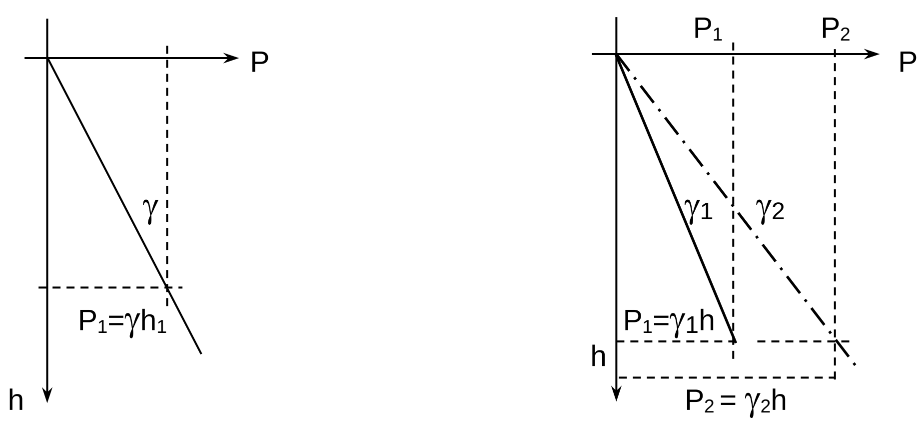
$E_2 = 1000(2.3\text{-}1.2)(1.8)(1.5)=2970$ kg

Nótese que el producto $h_2\ A_2 = V_2$ sería el volumen del líquido que estaría encima de la tapa *eb* y que llamamos "imaginario"



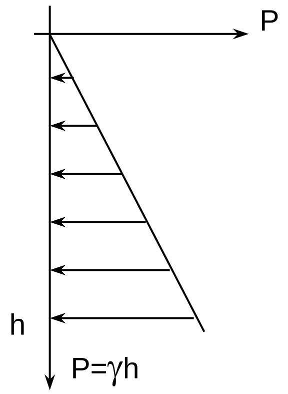
Gráfica de la presión

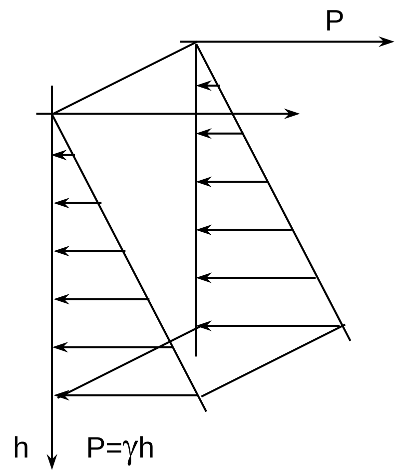
Sabemos que la presión hidrostática varía con la profundidad de acuerdo a $P = \gamma\ h$ que es la ecuación de una línea recta (similar a $y = mx$) que pasa por el origen con pendiente γ. De manera que, podemos representar la variación de la presión mediante una gráfica como la siguiente:



Las distancias horizontales representan las magnitudes de la presión hidrostática, misma que aumenta, al aumentar la profundidad h. En la segunda figura vemos que para una misma profundidad las presiones son diferentes dentro de líquidos con diferente peso específico.

También podemos representar ***las fuerzas*** *asociadas a la presión* como una carga triangular, en dos o tres dimensiones, en este caso se le llama cuña o prisma de presiones:

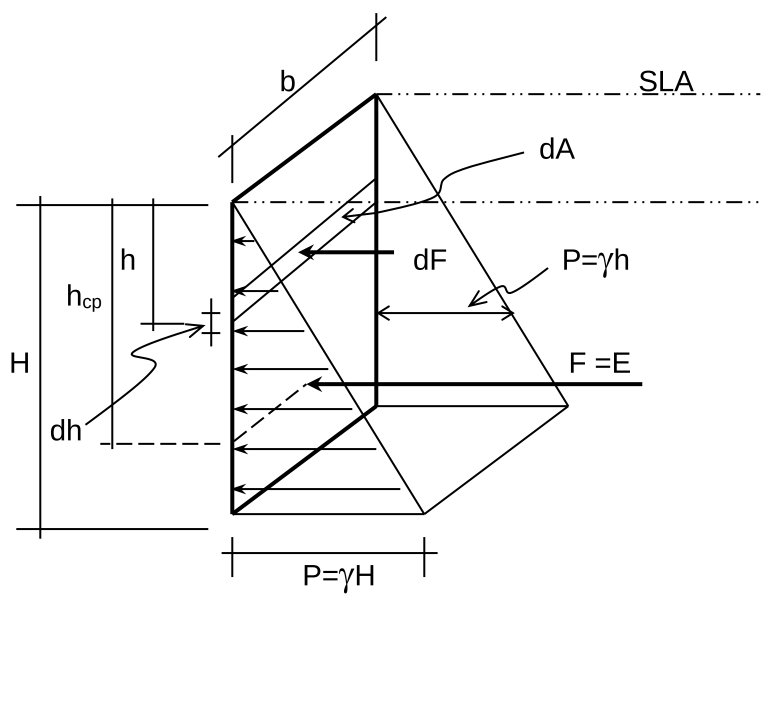




Es común dibujar esta gráfica en el esquema de las superficies que soportan la presión hidrostática, haciendo coincidir el eje de las presiones con la superficie libre del líquido, ya que ahí la presión hidrostática es cero.

Caso 2.- Fuerza hidrostática sobre una superficie plana, rectangular, vertical, cuyo lado superior coincide con la superficie libre del agua

Consideremos una superficie como la descrita en el título, de ancho b y alto H.



La diferencial de área dA = b dh se encuentra ubicada a una profundidad h variable, que va desde 0 hasta H, en esta área actúa la fuerza dF.

Por definición, la presión en el área dA es $P = dF / dA$

Por ello $dF = P\, dA$

Donde P es la presión hidrostática $P = \gamma\, h$

Sustituyendo $dF = \gamma\, h\, dA = \gamma\, h\, b\, dh$ (2.19)

Por lo tanto, la fuerza total sobre la superficie es

$$F = \int dF = \int \gamma\, h\, dA = \gamma \int_0^H h dA = \gamma \int_0^H h b dh$$

$$E = F = \gamma\, b \int_0^H h dh = \frac{1}{2} \gamma b H^2 \qquad (2.20)$$

Esta ecuación representa el empuje o fuerza hidrostática resultante. Y si la observamos en relación al diagrama de presiones nos damos cuenta que también representa el ***volumen del diagrama*** o cuña de esfuerzos, este volumen es el área del triángulo por el ancho b

$$V_p = \frac{\gamma H H}{2} b = \frac{\gamma b H^2}{2} = E \qquad (2.21)$$

Por eso se dice que ***el empuje sobre una superficie plana vertical es igual al volumen del diagrama de presiones***

¿Qué unidades tiene el volumen del diagrama de presiones?
¡Encuéntralas!

$[V_P] =$

Una vez que hemos determinado la magnitud de la fuerza hidrostática debemos encontrar su posición. Para encontrar la ubicación de esta fuerza debemos utilizar el teorema de momentos que plantea: ***"El momento de la resultante es igual a la suma de los momentos",***

En nuestro caso el brazo de palanca del empuje es h_{cp} es decir la profundidad al centro de presiones, que es el punto, denotado por CP, en donde se considera concentrado el empuje::

$$E\, h_{cp} = \int dM = \int df h = \gamma\, b \int_0^H h h dh = \frac{1}{3} \gamma\, b\, H^3 \qquad (2.22)$$

Para conocer h_{cp} lo despejamos,

$$h_{CP} = \frac{\gamma b H^3 / 3}{E} \qquad (2.23)$$

Para simplificarlo expresamos el empuje como $E = \gamma\, b\, H^2 /2$ quedando

$$h_{cp} = \frac{2}{3}\, H \qquad (2.24)$$

Que coincide con el centroide de un triángulo y de un prisma triangular, es decir el de la cuña de presiones.
Recapitulando: ***el empuje sobre una superficie plana vertical es igual al volumen del diagrama de presiones y pasa por su centroide.***

Ejemplo 2.15. Se pretende construir un tanque de 3 m de ancho por 6 m de largo y de 2m de profundidad, encontrar el empuje hidrostático sobre la pared de 3 m. Suponer que el agua llega hasta el borde superior.

Solución:

En las figuras se muestran el tanque y el diagrama de presiones sobre la pared que nos interesa. Por simplicidad se ha dibujado en dos dimensiones pero sabemos que tiene un ancho b= 3m

"El empuje es igual al volumen del diagrama de presiones"

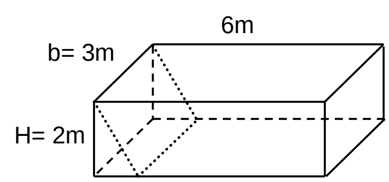
$$E = V_P = \frac{\gamma b H^2}{2} = 1000(3)(2^2)(0.5)$$

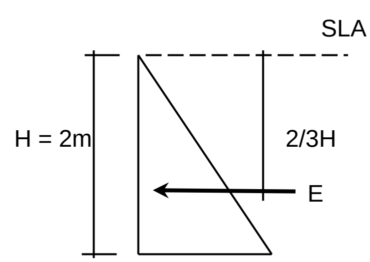
$$E = 6000\ kg$$

Y estará ubicado a una profundidad

$$Y_{PC} = \frac{2H}{3} = 1.33\ m$$

Si reconsiderando el diseño, se quisiera aumentar el largo de 6 m a 10 m ¿Sería necesario recalcular el empuje sobre la pared de 3 m?

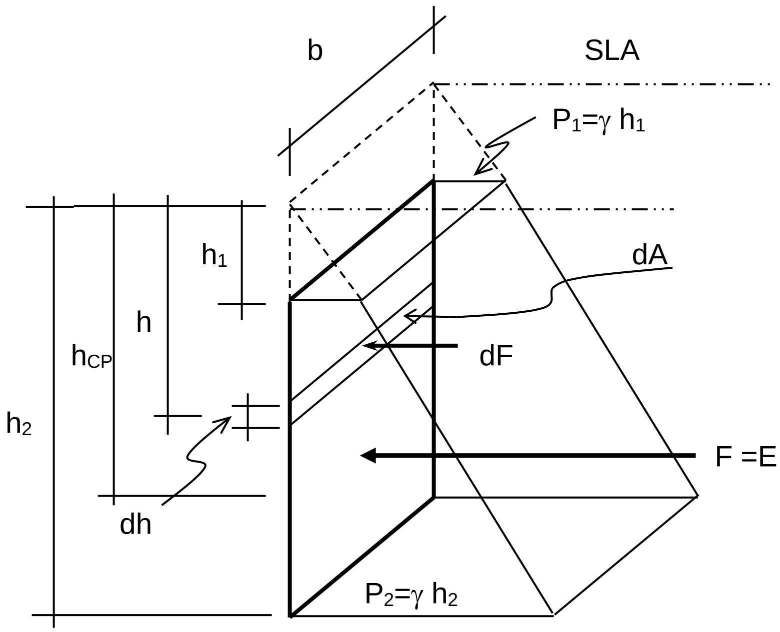




Nótese que en el análisis de fuerzas se está considerando que la superficie libre del agua SLA llega hasta el borde superior del tanque, Constructivamente sería adecuado que las paredes fueran un poco más altas para dejar un borde libre.

Caso 3.- Fuerza hidrostática sobre una superficie plana, rectangular, vertical, cuyo lado superior es paralelo a la superficie libre del agua.

Consideremos una superficie como la descrita con un ancho b. El lado superior se encuentra a una profundidad h_1 y el inferior a h_2.



La diferencial de área dA = b dh se encuentra ubicada a una profundidad h variable, que va desde h_1 hasta h_2, en esta área actúa la fuerza dF.

Por definición, la presión en el área dA es $P = dF / dA$

Por ello $dF = P\, dA$

Donde P es la presión hidrostática $P = \gamma\, h$

Entonces $dF = \gamma\, h\, dA = \gamma\, h\, b\, dh$ (2.21)

Por lo tanto, la fuerza total sobre la superficie es

$$F = \int dF = \int \gamma h dA = \gamma \int_{h1}^{h2} h dA = \gamma \int_{h1}^{h2} h b dh$$

$$E = F = \gamma\, b \int_{h1}^{h2} h dh = \frac{1}{2} \gamma\, b\, (h_2^2 - h_1^2) \qquad (2.25)$$

Esta ecuación representa el empuje o fuerza hidrostática resultante. Y si la observamos en relación al diagrama de presiones nos damos cuenta que también representa el volumen del diagrama de presiones.

Por geometría el volumen será el área del trapecio por el largo b:

$$V_P = (\gamma h_2 + \gamma h_1)(h_2 - h_1)\ b / 2 = \frac{1}{2}\gamma\ b\ (h_2 + h_1)\ (h_2 - h_1)$$

$$V_P = \frac{1}{2}\gamma\ b\ (h^2_2 - h^2_1) = E \qquad (2.26)$$

Las unidades del volumen del diagrama de presiones deberán ser unidades de fuerza. Para demostrarlo hagamos un análisis dimensional en el sistema técnico[5]:

$$[\ V_P\ ] = [\ \frac{1}{2}\gamma\ b\ (h^2_2 - h^2_1)\ ] = F\ L^{-3}\ L\ L^2 = F$$

¡Teníamos razón!, y es que *el volumen de presiones es la representación de las fuerzas hidrostáticas que están actuando sobre la superficie* rectangular.

Para encontrar la ubicación de esta fuerza debemos utilizar el teorema de momentos que plantea: *"El momento de la resultante es igual a la suma de los momentos".* Aplicado a lo que nos interesa

$$E\ h_{cp} = \int dM = \int h df$$

Donde $dF = \gamma\ h\ dA = \gamma\ h\ b\ dh.$

Entonces: $$E\ h_{cp} = \gamma\ b \int_{h1}^{h2} hhdh = \frac{1}{3}\gamma\ b\ (h^3_2 - h^3_1) \qquad (2.27)$$

Para conocer h_{cp} lo despejamos, y al dividir entre el empuje $E = \frac{1}{2}\gamma\ b\ (h^2_2 - h^2_1)$ queda

$$h_{CP} = \frac{2}{3}\left(\frac{h_2^3 - h_1^3}{h_2^2 - h_1^2}\right) \qquad (2.28)$$

Que es la ubicación del centro de presiones y al mismo tiempo la del centroide del trapecio o prisma trapecial, ***medido desde la superficie libre del agua***.

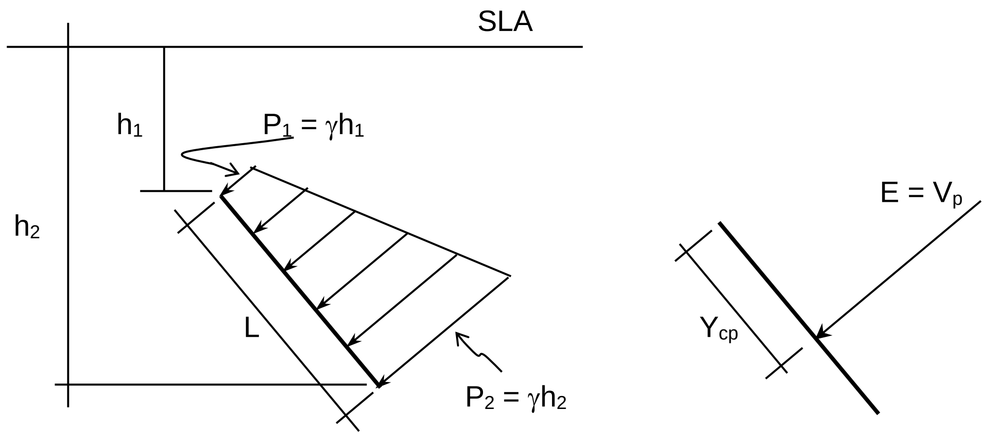
De manera que el enunciado ***"El empuje sobre una superficie plana vertical es igual al volumen del diagrama de presiones y pasa por su centroide".*** Sigue siendo válido.

Consideraremos que con estos dos ejemplos esta conclusión se puede generalizar a cualquier caso, lo cual es lógico, ya que el diagrama de presiones representa la carga (trapecial) aplicada por el agua (o líquido) sobre la superficie en cuestión.

[5] ¿Podrías hacer un análisis dimensional para el sistema absoluto?

Caso 4.- Fuerza hidrostática sobre una superficie plana rectangular inclinada.

En la figura se muestra, en solo dos dimensiones, una superficie plana inclinada de ancho b, perpendicular al papel.



El lado superior de la superficie se encuentra a la profundidad h_1 y está sometido a una presión $P_1 = \gamma h_1$ que actúa perpendicularmente a la superficie en cuestión. De manera similar, el lado inferior se encuentra a la profundidad h_2 y sobre él está actuando la presión $P_2 = \gamma h_2$. La variación de la presión entre un extremo y otro sigue siendo lineal, por lo que la cuña de presiones mantiene la forma trapecial.

La resultante de las fuerzas hidrostáticas asociadas a la presión, se puede encontrar planteando una diferencial de área, la fuerza diferencial que sobre ella actúa e integrando la diferencial de fuerza para encontrar la fuerza resultante. También es posible, al igual que en los ejemplos anteriores, usar el diagrama de presiones. Aquí usaremos este procedimiento.

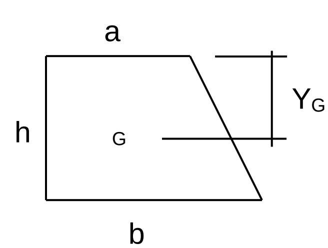
La fuerza hidrostática o empuje es igual al volumen del diagrama de presiones y pasa por el centroide del mismo. Entonces, aplicando la fórmula del trapecio tenemos:

$$V_P = \frac{\gamma h_2 + \gamma h_1}{2}\, Lb = E \qquad (2.29)$$

Nótese que esta ecuación es diferente de la 2.25.

Por geometría la ubicación del centroide de un trapecio desde su lado superior es:

$$Y_G = \frac{h}{3}\left(\frac{2b+a}{b+a}\right)$$



Aplicando al caso que nos interesa: $Y_{CP} = \dfrac{L}{3}\,\dfrac{2\gamma h_2 + \gamma h_1}{\gamma h_2 + \gamma h_1}$

Factorizando γ para eliminarlo $Y_{CP} = \dfrac{L}{3}\,\dfrac{2h_2 + h_1}{h_2 + h_1}$

Nótese que el centro de presiones ha sido localizado a partir del lado superior del trapecio (su base menor), por lo cual esta expresión difiere de la encontrada en el caso 3.

Ejemplo 2.16. Calcular el contrapeso W mínimo para que la compuerta automática rectangular esté a punto de abrirse con el tirante H = 2 m. Despreciar la fricción en el eje O y el peso de la compuerta. Ancho b = 1.30 m; a = 1.20 m; e = 0.7 m; c = 0.8 m

Solución: Debemos encontrar el valor del empuje hidrostático y su ubicación respecto al eje O y luego tomar momentos respecto a dicho eje para encontrar el peso que equilibre a la compuerta.

$$d = \sqrt{H^2 + e^2} = \sqrt{2^2 + 0.7^2} = 2.119\ m$$

$$\theta = angtg\frac{H}{e} = tg^{-1}\frac{2}{0.7}$$

$$\theta = 70.71°$$

$$sen\theta = \frac{c}{g}$$

$$g = \frac{c}{sen\theta} = \frac{0.8}{sen\ 70.71°} = 0.847\ m$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma Hdb = \frac{1}{2}(1000)(2)(2.119)(1.3)$$

$$E = 2754.7\ \ kg$$

Ubicado a 2/3 d desde la SLA

$$\frac{2}{3}d = 1.413\ m$$

El brazo de palanca de E es

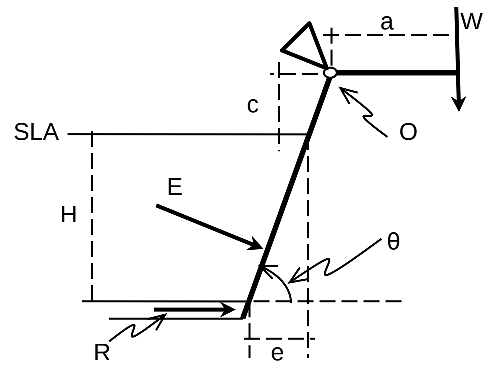
$$L = g + \frac{2}{3}d = 0.847 + 1.413 = 2.260\ m$$

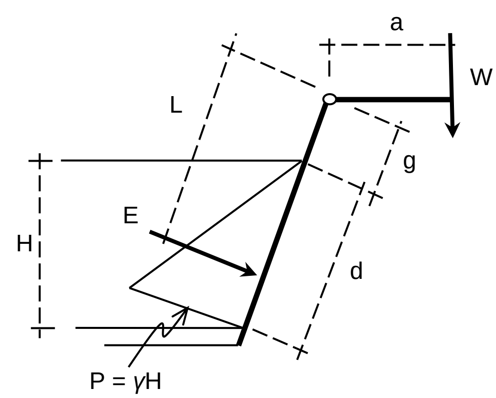
Cuando la compuerta está a punto de abrirse la reacción R vale cero

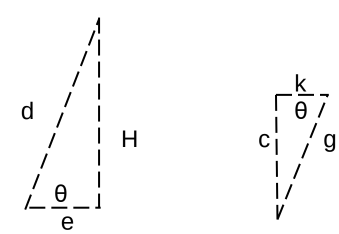
$$\circlearrowleft + \sum M_O = EL - Wa = 0$$

$$2754.7(2.26) - W(1.20) = 0$$

$$W = 5188\ \ kg$$







Ejemplo 2.17. Resolver el ejercicio anterior encontrando las componentes vertical y horizontal del empuje.

Solución:

El empuje horizontal es

$$E_X = \frac{1}{2}\gamma HHb = \frac{1}{2}(1000)(2)(2)(1.3)$$

$$E_X = 2600\,kg$$

Su brazo de palanca desde O

$$Y = c + \frac{2}{3}H = 0.8 + \frac{2}{3}2 = 2.133\,m$$

El empuje vertical es el peso del líquido encima de la placa inclinada

$$E_Y = W_{Liq} = \gamma V = \gamma Ab = \frac{\gamma eH}{2}b$$

$$E_Y = \frac{1000(0.7)(2)(1.3)}{2} = 910\,kg$$

Su brazo de palanca es

$$X = \frac{2}{3}e + k$$

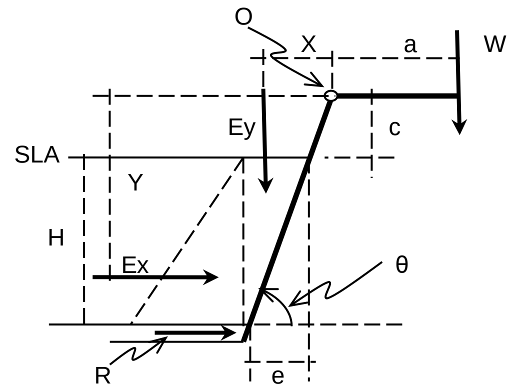
$$k = gcos\theta = 0.847cos70.71° = 0.279m$$

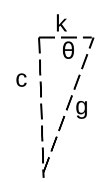
$$X = \frac{2}{3}(0.7) + 0.287 = 0.746\,m$$

$$+\sum M_O = E_X Y + E_Y X - Wa = 0$$

$$2600(2.133) + 910(0.746) = W(1.20)$$

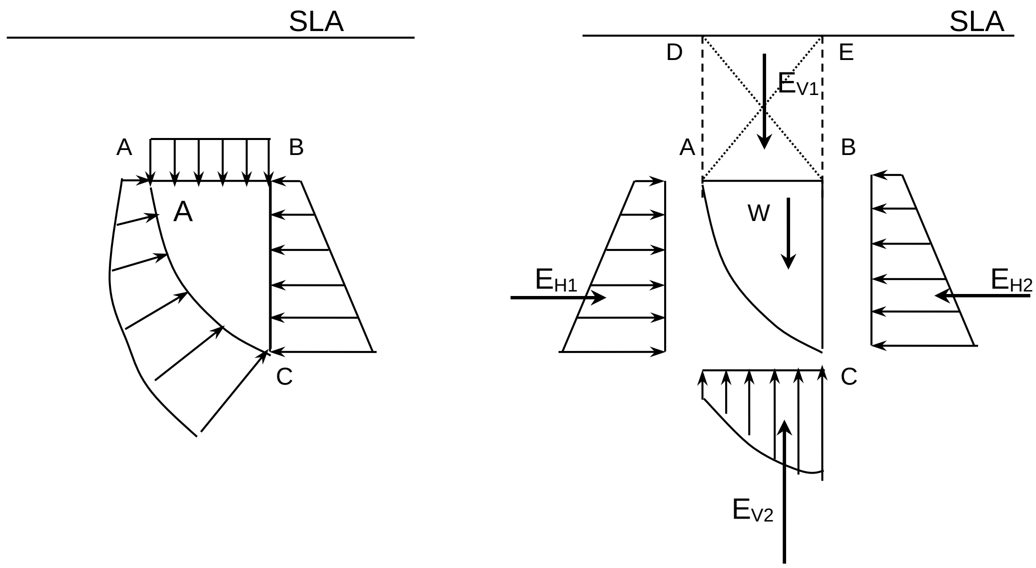
$$W = 5187.21\ kg$$





Caso 5.- fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas.

Consideremos un líquido en reposo dentro del cual se ha aislado, de manera imaginaria, una porción ABC que presenta una cara curva. Evidentemente el elemento ABC también se encuentra en reposo. Analizaremos las fuerzas que el resto del líquido le aplica a este elemento:



Queremos conocer como son las fuerzas sobre la superficie AC, para ello buscaremos determinar las componentes horizontal y vertical, en ese orden.

Por equilibrio, la fuerza horizontal que actúa sobre la superficie curva AC, que es E_{H1}, debe ser igual a la fuerza horizontal sobre la superficie recta BC, llamada E_{H2}.

$$\rightarrow +\Sigma F_X = E_{H1} - E_{H2} = 0$$

$$E_{H1} = E_{H2} \qquad (2.30)$$

En la figura observamos que BC es la ***proyección sobre un plano vertical*** de la superficie curva AC. Entonces podemos decir que:

> ***"La componente horizontal de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva es igual, en magnitud y ubicación, a la fuerza hidrostática que actúa sobre la proyección vertical de dicha superficie"***[6]

Dicho de otra manera, para encontrar el ***empuje horizontal*** sobre una superficie curva.

1.- proyectamos la superficie curva sobre un plano ***vertical***.
2.- Encontramos el diagrama de presiones y el empuje horizontal sobre dicha proyección.
3.- Este empuje sobre la proyección será igual al que actúa sobre la superficie curva.

[6] De ser necesario lee varias veces el enunciado relacionándolo con la figura hasta que se comprenda completamente.

En el sentido vertical observamos que:

$$\uparrow +\Sigma F_Y = E_{V2} - E_{V1} - W_{ABC} = 0$$
$$E_{V2} = E_{V1} + W_{ABC} \qquad (2.31)$$

Es decir, el empuje vertical sobre la superficie curva AC, denominado E_{V2} es igual al empuje vertical sobre la superficie recta AB y es el peso de la porción rectangular DEAB, más el peso de la porción ABC:

$$E_{V2} = W_{DEAB} + W_{ABC} = W_{DEBCA} \qquad (2.32)$$

Por ello decimos que

> ***"El empuje vertical sobre una superficie curva es igual, en magnitud y ubicación, al peso del líquido real o imaginario que se encuentra encima de dicha superficie".***

El concepto de líquido imaginario ya lo habíamos explicado en el caso 1 y lo utilizamos cuando el líquido se encuentra por debajo de la superficie.

Esta descomposición del empuje total, en sus componentes horizontal y vertical es también aplicable a una superficie inclinada, lo que constituye un método alternativo a lo visto en el caso 4.

Ejemplo 2.18. Calcular la fuerza hidrostática sobre la placa curva del tanque mostrado y su ubicación. El ancho perpendicular al papel es b = 3 m y el líquido contenido es un aceite de γ = 7850 N/m^3, además r = 1.2 m, d = 0.8 m.

Solución: El empuje horizontal es:

$$E_H = (\gamma\,(d+r) + \gamma\, d)\, r\, b/2$$
$$= 1/2\,(d+r+d)\,\gamma\, r\, b$$
$$= (½)(0.8+1.2+0.8)\ 7850\ (1.2)(3)$$

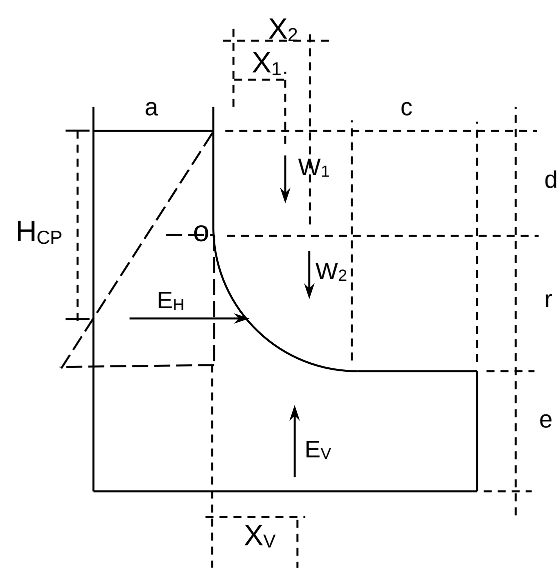
$$E_H = 39564 \text{ N}$$

En el sentido vertical

$$E_V = W_1 + W_2$$

Donde W_1 y W_2 son los pesos del "líquido imaginario "que se encuentra en el rectángulo de lados r x d, y en el cuarto de circulo de radio r, respectivamente. Entonces:

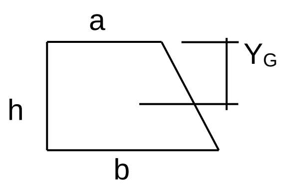
$$W_1 = \gamma\, r\, d\, b = 7850 \times 1.2 \times 0.8 \times 3$$
$$= 22\ 608 \text{ N}$$



$$W_2 = \gamma \frac{1}{4}\pi r^2 b = 7850\frac{1}{4}\pi\left(1.2^2\right)3 = 26634.42N$$

E_V = 49242 N

Ubicaciones.
El empuje horizontal pasa por el centroide del trapecio



$Y_G = \frac{h}{3}\frac{2b+a}{b+a}$

Aplicando ésta fórmula a los datos

$$H_{CP} = d + Y_{CP} = 0.8 + \left(\frac{1.2}{3}\right)\left(\frac{2(2)+0.8}{2+0.8}\right)\frac{\gamma}{\gamma}$$

H_{CP} = 1.48 m

En este caso θ = 45º = 0.7854 rad

Entonces:

$$Y_G = 1.2\left(1 - \frac{2sen45}{3(0.7854)}\right) = 0.4797m$$

$$K = (R - Y_G)\cos\theta = (1.2 - 0.4797)\cos 45º$$

K = 0.509 m

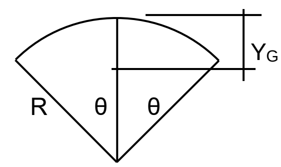
$X_2 = R - K$ = 1.2 – 0.509 = 0.691 m

Para encontrar X_V aplicamos el teorema de momentos con respecto al punto O.

$E_V X_V = W_1 X_1 + W_2 X_2$

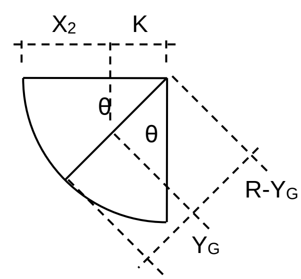
X_1 = r / 2 = 0.6 m

Calculo de X_2: Del Sotelo pag. 48 tomamos la fórmula para localizar el centroide de un sector circular



$Y_G = R\left(1 - \frac{2sen\theta}{3\theta}\right)$ donde 3θ en rad

Para aplicarla nuestro problema debemos girarla



Tomando momentos respecto al punto O y expresando las fuerzas en kN

$$E_V X_V = W_1 X_1 + W_2 X_2$$

$$X_V = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2}{E_V}$$

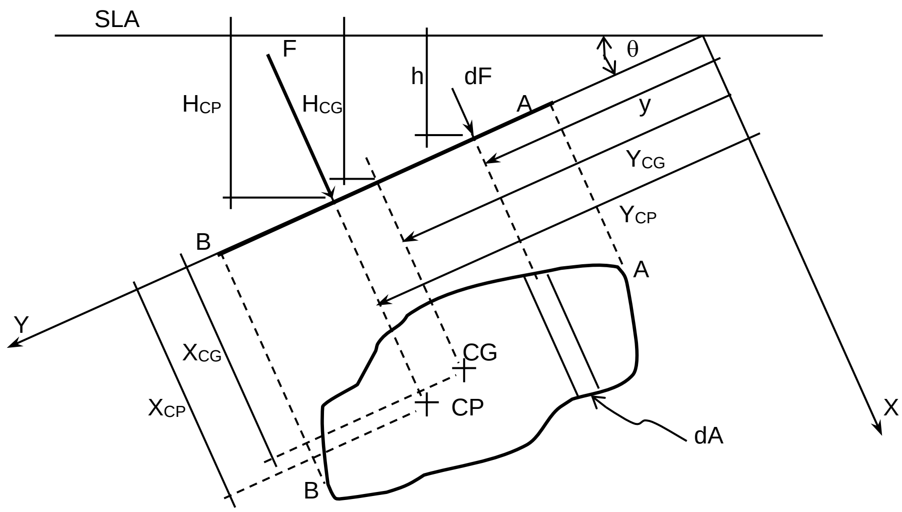
$$X_V = \frac{(22.6)0.6 + (26.6)0.691}{49.2} = 0.649m$$

Medidos horizontalmente desde el punto O.

Caso 6. Fuerza hidrostática sobre una superficie plana cualquiera.

Hasta ahora todas las superficies estudiadas han sido rectangulares, que es la forma más común; sin embargo pueden llegar a presentarse otro tipo de figuras en las paredes de los tanques o en las compuertas de tuberías y canales: circulares, trapezoidales, triangulares, parabólicas, etc. por ello aquí desarrollaremos un procedimiento general para calcular la fuerza hidrostática sobre cualquier figura plana.

Consideremos una superficie plana AB sumergida en un líquido de peso específico γ. El plano que contiene a la superficie AB intersecta a la superficie libre del agua formando un ángulo θ. En dicha intersección colocaremos al eje X, por lo que la superficie estará contenida en el plano XY.



La figura muestra la superficie plana AB en perfil y en proyección. El plano XY contiene a la superficie. El eje X se encuentra en la intersección del plano que contiene a la superficie AB y la superficie libre del agua.

A una distancia Y del eje X y a una profundidad h se encuentra la diferencial de área dA en donde está actuando la fuerza dF. Al igual que en los casos anteriores:

$$dF = PdA = \gamma\, hdA$$

Como $h = y \operatorname{sen}\theta$

$$dF = \gamma\, y\, (\operatorname{sen}\theta)\, dA \quad \text{..............................(2.33)}$$

La fuerza total sobre el área será:

$$F = \int dF = \int \gamma\, y \operatorname{sen}\theta\, dA$$

Como γ y θ son constantes

$$F = \gamma \operatorname{sen}\theta \int y\, dA \qquad (2.34)$$

Donde $\int$ y dA = Y_{CG} A es el primer momento o momento estático del área A, entonces:

$$F = \gamma\,(\text{sen}\,\theta) Y_{CG}\,A \qquad (2.35)$$

Pero $(\text{sen}\,\theta) Y_{CG} = H_{CG}$ es la profundidad del centro de gravedad CG o centroide del área, entonces:

$$F = \gamma\,A\,H_{CG} = P_{CG}\,A \qquad (2.36)$$

Es decir:

La fuerza hidrostática sobre una superficie plana cualquiera es igual al producto del peso específico del líquido γ, por el área A, por la profundidad del centroide h_{CG} del área. Dicho de otra manera es el producto de la presión en el centroide del área P_{CG}, por dicha área A

Esta fuerza está aplicada en un punto llamado centro de presiones CP con coordenadas x_{CP}, y_{CP} que está ubicado por debajo del centroide del área. Para localizarlo tomaremos momentos respecto al eje x de acuerdo al teorema de Varigñon que dice:

El momento de la resultante = Suma de los momentos de las fuerzas.

$$F\,Y_{CP} = \int y\,dF \qquad (2.37)$$

$$F\,Y_{CP} = \int y\,\gamma\,y\,\text{sen}\theta\,dA = \gamma\,\text{sen}\theta \int y^2\,dA \qquad (2.38)$$

Donde $\int y^2 dA = I_X$ es el segundo momento o momento de inercia del área A con respecto al eje X.

$$FY_{CP} = \gamma(sen\theta)I_X \qquad (2.39)$$

Como en las tablas, los momentos de inercia aparecen calculados respecto a ejes que pasan por el centroide de la figura, denotados por $I_{XCG} = \bar{I}_x$ aplicaremos el teorema de los ejes paralelos que permite relacionar ambos momentos de inercia:

$$I_x = I_{XCG} + A\,Y_{CG}^2 \qquad (2.40)$$

Sustituyendo

$$F\,Y_{CP} = \gamma\,\text{sen}\theta\,(I_{XCG} + A\,Y_{CG}^2)$$

Despejando Y_{CP}

$$Y_{CP} = \frac{\gamma\,\text{sen}\theta\,(I_{XCG} + A\,Y_{CG}^2)}{\gamma\,\text{sen}\,\theta\,Y_{CG}\,A}$$

$$Y_{CP} = \frac{I_{XCG} + AY_{CG}^2}{Y_{CG}A} = \frac{\bar{I}_X + A\bar{Y}^2}{\bar{Y}A} \qquad (2.41)$$

$$Y_{CP} = \frac{I_{XCG}}{Y_{CG}A} + Y_{CG} = \frac{\bar{I}_x}{\bar{Y}A} + \bar{Y} \qquad (2.42)$$

Si expresamos el momento de inercia en función del radio de giro: $I_{XCG} = R_{XCG}^2 A$ donde R_{XCG} es el radio de giro de la figura AB con respecto al eje X que pasa por su centroide. El centro de presiones se ubica en:

$$Y_{CP} = Y_{CG} + R_{XCG}^2 / Y_{CG} \qquad (2.43)$$

Si la superficie AB es simétrica, el centro de presiones estará sobre el eje de simetría. En caso contrario es necesario aplicar el teorema de momentos o de Varigñon con respecto al eje Y para encontrar el valor de X_{CP}.

$$FX_{CP} = \int xdF$$

$$FX_{CP} = \int x\gamma y sen\theta dA = \gamma sen\theta \int xydA \qquad (2.44)$$

Donde $\int$ x y dA = I_{XY} Es el producto de inercia del área AB con respecto al eje Y.

Sust. El valor de F y despejando $X_{CP} = \dfrac{\gamma sen\theta I_{XY}}{\gamma sen\theta Y_{CG}A} = \dfrac{I_{XY}}{Y_{CG}A}$ (2.45)

Si el producto de inercia se considera respecto a los ejes centroidales se denota por I_{XYC} y la relación es:

$$I_{XY} = I_{XYC} + X_{CG}\, Y_{CG}\, A \qquad (2.46)$$

Entonces: $X_{CP} = \dfrac{I_{XYC}}{Y_{CG}A} + X_{CG}$ (2.47)

Ejemplo 2.19. Encontrar el empuje sobre una compuerta plana circular vertical que obtura la circulación del tanque a la tubería de 1.5 m de diámetro. H_1 = 3 m. Resolver en el MKS absoluto.

Solución: El centroide de la placa está a una profundidad H_{CG} que por ser vertical es igual a Y_{CG}.

$$H_{CG} = Y_{CG} = H_1 + r = 3 + 0.75 = 3.75\ m$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(1.5)^2}{4} = 1.767\ m^2$$

$$E = \gamma A H_{CG} = 9810(1.767)(3.75)$$

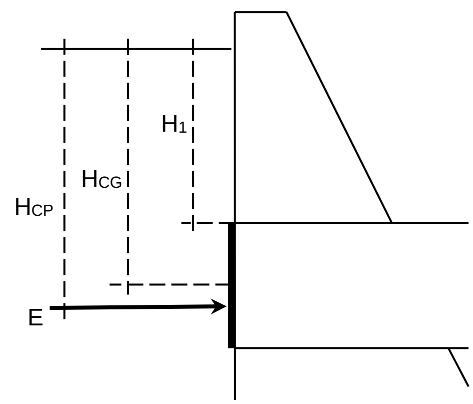
$$E = 65{,}004\ N = 65\ kN$$

La ubicación del empuje está dada por la ec. 2.42 donde $Y_{CP} = H_{CP}$ porque la compuerta está en un plano vertical

$$Y_{CP} = \frac{I_{XCG}}{Y_{CG}A} + Y_{CG}$$

El segundo momento de área del circulo respecto a un eje que pasa por su centroide es

$$I_C = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi(1.5)^4}{64} = 0.2485\ m^4$$



Entonces:

$$Y_{CP} = \frac{0.2485}{(3.75)(1.767)} + 3.75$$

$$Y_{CP} = 3.787\ m = H_{CP}$$

Ejemplo 2.20. Encontrar el empuje sobre una compuerta plana circular inclinada. Con datos similares a los del ejemplo anterior. Diámetro D = 1.5m; H_1 = 3 m; θ= 60°. Resolver en el MKS técnico.

Solución: Nótese que las distancias inclinadas están medidas desde el cruce del plano inclinado con la superficie libre del agua (punto O) se denotan por "Y"

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (1.5)^2}{4} = 1.767\ m^2$$

De la figura

$$sen\theta = \frac{H_1}{y_1}$$

$$Y_1 = \frac{H_1}{sen\theta} = \frac{3}{sen60°} = 3.464\ m$$

$$Y_{CG} = Y_1 + \frac{D}{2} = 3.464 + 0.75 = 4.214\ m$$

$$H_{CG} = Y_{CG} sen\theta = 4.214 sen60° = 3.649\ m$$

$$E = \gamma A H_{CG} = 1000(1.767)(3.649)$$

$$E = 6447.78\ kg$$

El segundo momento de área del circulo respecto a un eje que pasa por su centroide es

$$I_C = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (1.5)^4}{64} = 0.2485\ m^4$$

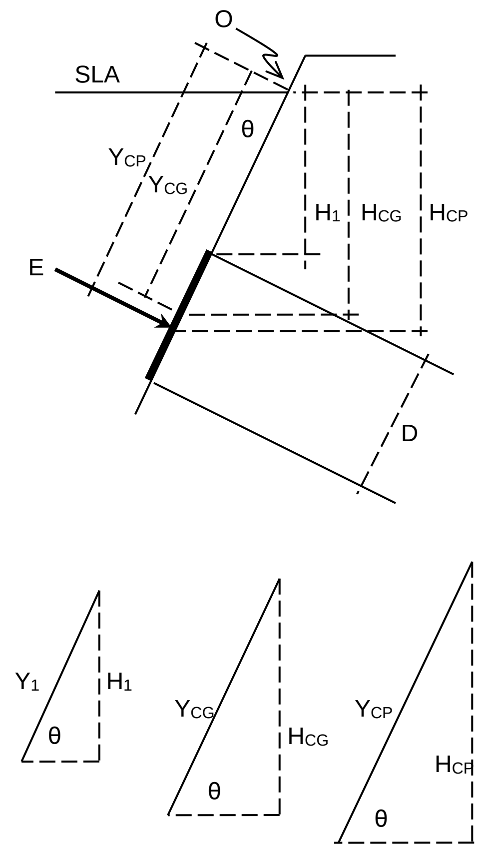
Entonces Sust. en la Ec. 2.42:

$$Y_{CP} = \frac{I_{XCG}}{Y_{CG} A} + Y_{CG} = \frac{\bar{I}_x}{\bar{Y} A} + \bar{Y}$$

$$Y_{CP} = \frac{0.2485}{(4.214)(1.767)} + 4.214$$

$$Y_{CP} = 4.247m$$

$$H_{CP} = Y_{CP} sen\theta = 4.247 sen60° = 3.678\ m$$



2.10 Cuestionario

1) ¿Qué estudia la Hidrostática?
2) ¿Qué aplicaciones prácticas tiene la Hidrostática?
3) ¿De dónde proviene el concepto de esfuerzo o presión?
4) ¿Cómo se define un esfuerzo?
5) ¿Cuántos tipos de esfuerzo hay?
6) ¿Qué es la presión?
7) ¿Qué esfuerzos existen en un líquido en reposo?
8) ¿Qué efecto tiene la aplicación de esfuerzos cortantes a una masa líquida?
9) ¿Cuáles son las dimensiones de la presión en el sistema técnico y en el absoluto?
10) ¿Cuáles son las unidades de presión en el Ingles técnico?
11) ¿Qué es un Pascal?
12) Menciona tres unidades de presión que no pertenezcan estrictamente a un sistema.
13) ¿Cuáles son los tres criterios para clasificar a las presiones?
14) ¿Qué es la presión hidrostática?
15) ¿Cuál es la ecuación de la presión hidrostática y que significa cada uno de los términos?
16) ¿Qué es la presión atmosférica y de que depende?
17) ¿Cuánto vale una atmósfera normal o “estándar” en Kg/cm^2, Pa y Lb/pulg^2?
18) ¿Qué es un manómetro?
19) ¿Cuál es la diferencia entre la presión atmosférica y la barométrica?
20) ¿Es correcto decir que todas las presiones barométricas son absolutas? ¿por qué?
21) ¿Y todas las presiones absolutas serán barométricas?
22) ¿Cuál es la relación entre las presiones manométricas y las relativas?
23) ¿Cuál es la relación entre la presión absoluta y la presión relativa?
24) ¿Cuánto vale la presión atmosférica en escala relativa?
25) ¿Cuál es la dirección y el sentido de las fuerzas asociadas a la presión hidrostática?
26) ¿En qué dirección se presenta la presión hidrostática cuando actúa sobre una partícula de fluido?
27) ¿De qué depende la presión hidrostática?
28) ¿Qué plantea el principio de Pascal?
29) ¿Cómo se transmite un incremento de presión en un sólido?
30) ¿Cuál es la ecuación que explica la multiplicación de la fuerza en un gato hidráulico?
31) ¿Qué plantea el principio de Arquímedes?
32) ¿Por qué flota un cuerpo?
33) Si el hierro es más pesado que el agua ¿Cómo es que los barcos construidos con ese material pueden flotar?
34) ¿El empuje hidrostático o flotación aumenta con la profundidad?
35) ¿Qué se necesita para que un cuerpo sumergido se mantenga en reposo dentro de un líquido?

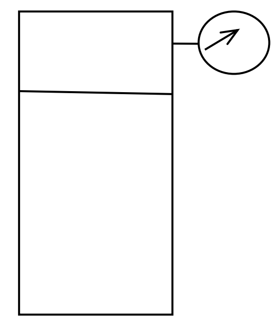
2.11 Ejercicios propuestos

1) Calcular el valor de una atmósfera en las siguientes unidades de presión: kg/cm^2, kg/m^2, Pa, lb/pulg^2, lb/ft^2.
2) Si construyéramos un barómetro como el de Torricelli pero en vez de mercurio usáramos agua, ¿qué altura alcanzaría la columna de líquido con una atmósfera normal o estándar?

3) ¿Qué altura alcanzaría la columna de agua en un barómetro como el de Torricelli en un lugar donde la lectura de éste fuese 720 mm de Hg?
4) ¿Qué diámetro debe tener el pistón mayor de un gato hidráulico para subir un peso de 2000 kg al aplicarle una fuerza de 300 N al pistón menor de 1.5 cm de diámetro?
5) Los radios de los pistones de una prensa hidráulica son 3/8" y 2.5", calcular la fuerza que se debe aplicar en el pistón pequeño para sostener una carga de 180 kN en el pistón grande.
6) ¿Qué presión hidrostática se ejerce sobre la cubierta de un submarino que se encuentra a 120 m bajo la superficie? Recordar que la densidad del agua salada es mayor que la del agua dulce, suponer que vale 1020 kg/m^3 y que no varía con la profundidad.
7) Si la compuerta del submarino del problema anterior es circular y tiene un diámetro de 0.8 m, calcular la fuerza que está soportando a esa profundidad
8) Calcular la presión en un tanque de petróleo crudo a una profundidad de 3.5 m si está abierto a la atmósfera.
9) Si la presión en un punto dentro de un líquido a 3.5 m de profundidad es de 180 kPa, ¿Cuál será la densidad, el peso específico y la densidad relativa del líquido? Resolver el problema en el sistema MKS absoluto suponiendo que la superficie libre del líquido está abierto a la atmósfera.
10) Se va a colar una columna cilíndrica de 0.5 m de diámetro y 3.5 m de altura, ¿Qué presión se ejercerá en el fondo de la cimbra cuando el concreto esté líquido? (densidad relativa del concreto = 2.4). ¿Cuál será el peso de la columna?
11) Suponiendo que el peso específico del aire es constante e igual a 11.8 N/ m^3, calcular el espesor supuesto de la atmósfera normal o estándar.
12) La presión barométrica es de 762 mm de mercurio al nivel del mar y de 737 en la cima de una montaña, suponiendo que el peso específico del aire es constante e igual a 11.8 N/ m3 determinar la altura de la montaña.
13) El manómetro de un tanque de gas marca 180 kPa cuando el barómetro marca 720 mm de Hg, ¿Cuál es el valor de esta presión en la escala absoluta en kg/ cm^2 y lb/pulg^2?
14) Un recipiente se encuentra a 3.5 lb/pulg^2 de vacío, ¿Cuál es la presión absoluta y relativa si el barómetro marca 723 mm de Hg en kg/cm^2 y Pa?
15) Una presión absoluta es de 82.0 kPa, ¿Cuál es el vacío correspondiente si la presión atmosférica es de 0.97 Kg/cm^2?
16) Un avión vuela a una altura tal que la presión exterior es de 405 mm de Hg, mientras que en el interior es de 95 kPa, si la puerta de acceso tiene las dimensiones de 3 ft por 7 ft. Calcular la fuerza en cada cara de la puerta y la que debe resistir las bisagras y la cerradura.
17) La llanta de refacción de un auto se infla a 30 lb/pulg^2 en la ciudad de México cuando el barómetro indica 583 mm de Hg, suponiendo que no hay fugas, qué presión indicará el manómetro en la misma llanta cuando al viajar a Acapulco la presión atmosférica sea de 762 mm de Hg.

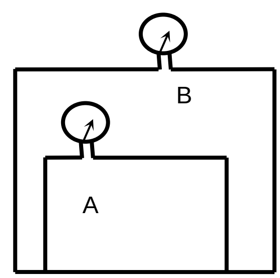
18.- Un tanque cilíndrico de 0.9 m de diámetro y 5 de altura está colocado verticalmente y tiene aceite de Dr = 0.8, hasta 4 m. En la parte superior hay un manómetro que indica la presión interna de 156 kPa. El barómetro marca 650 mm de Hg. Calcular: A) la presión en el espacio con aire absoluta y relativa. B) La presión en el fondo y C) La fuerza en el fondo del tanque.

Sol. A) P_A = 242465 Pa(abs) B) P_F =187292 Pa (rel) C) F_F = 119150 N

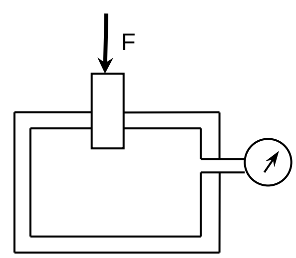


19.- Encontrar la presión absoluta en el tanque A en Kg/cm2 y en mm de Hg.
P_A = 70 kPa
P_B = 160 Kpa
Pbar= 720 mm de Hg

Solución: P_A= 3.321 Kg/cm^2 (Abs)
= 2249 mm de Hg

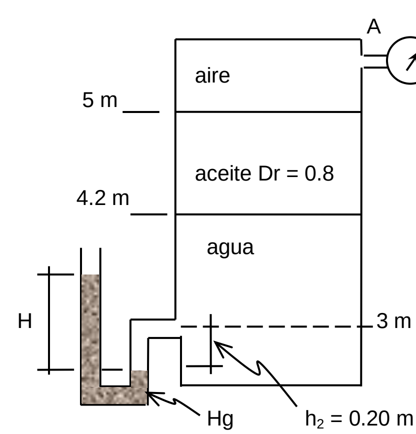


20.- El manómetro del tanque, que está lleno de líquido, originalmente marcaba 1.2 Kg/cm^2.
A) ¿Cuál será la nueva lectura después de que se aplica una fuerza de 300 lb al émbolo de 2"de diámetro?
B) Cuál es la presión absoluta equivalente si *P_{At}=0.9 bar.* Resolver en el MKS téc.



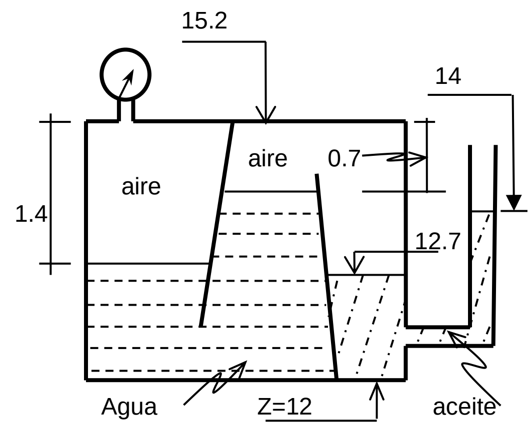
21.- Encontrar la presión manométrica en A y su equivalente en la escala absoluta si P_{AT} = 730 mm de Hg y
H = 850 mm

Sol. P_A = 93058 N/m^2 (Rel.)
P_A = 190166 N/m^2 (Abs.)



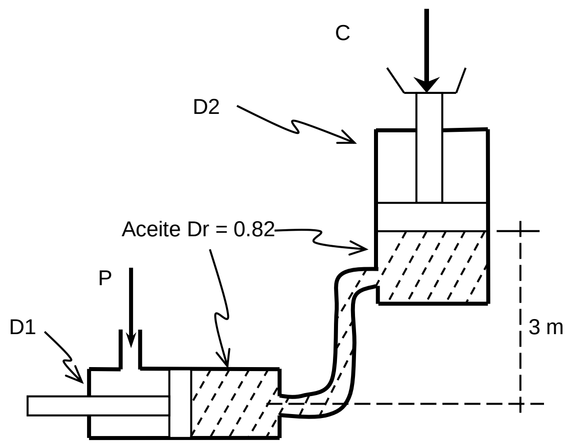
22.- Encontrar:
A) La lectura del manómetro de carátula en Pascales si el aceite tiene una $Dr_{Ac} = 0.8$
B) Pa presión absoluta equivalente si P_{AT} =680 mm de Hg
Acotaciones en m.

Resp. P_M= 17069 Pa =1740 kg/m^2

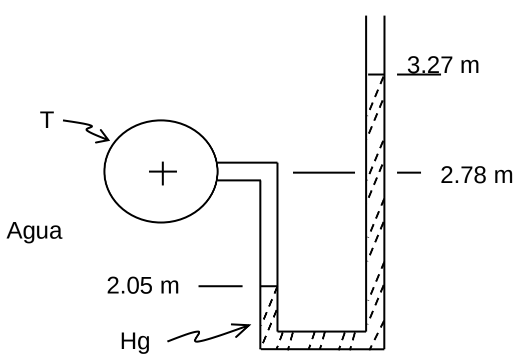


23.- Que presión expresada en pascales es necesario inyectar en el émbolo 1 para sostener y en su caso elevar una carga C de 8 Ton
D_1 = 1”
D_2 = 10”

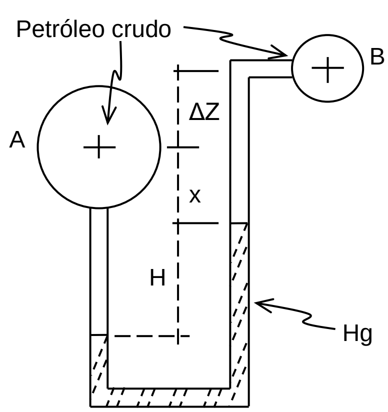
Resp. P_1 = 160 344 kg/m^2



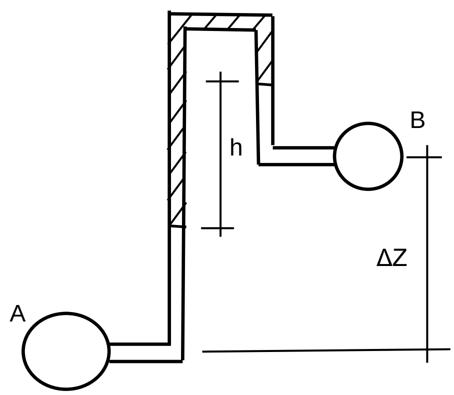
24.- Determinar P_T en SI y MKS tec.



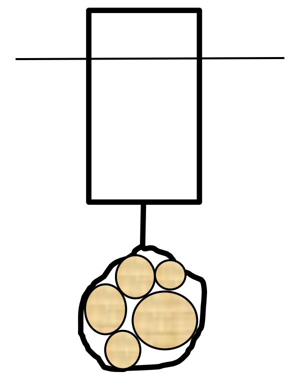
25.- Encontrar la ecuación que proporciona la diferencia de presiones entre A y B



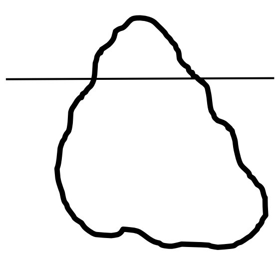
26.- Encontrar la diferencia de presiones entre las secciones transversales A y B de la misma tubería, por la que circula agua. El líquido manométrico es una resina de Dr = 0.85; h = 0.81 m; ΔZ = 1.85 m



27.- Un tanque cilíndrico de 0.9 m de diámetro 1.2m de altura y 25 Kg debe flotar en agua salada emergiendo 15 cm. Encontrar: A) El peso de las piedras con las que se debe lastrar, si éstas tienen una Dr = 2.3



28.- Encontrar el porcentaje del volumen que emerge, en un iceberg con densidad de 917 kg/m3 que flota en agua de mar de 1.025 de densidad relativa



29.- Un bloque rectangular de 0.5m x 0.8 m x 1.2 m flota sobre agua salada emergiendo 0.2 m. Encontrar el peso específico, la densidad y la densidad relativa de un segundo líquido, si el mismo bloque flota emergiendo 0.15 m